Căn bậc hai và căn bậc ba

264 ý tự luận có lời giải

3 mạch kiến thức · 27 nhóm bài tập

A. Căn bậc hai và căn bậc ba	86 ý
B. Phép tính và rút gọn căn thức	106 ý
C. Phương trình chứa căn	72 ý

Cách học với tài liệu

Đọc yêu cầu chung của mỗi bài và tự làm từng ý trước khi xem lời giải. Với biểu thức chứa căn, hãy xác định điều kiện trước khi biến đổi. Với phương trình, nhớ đối chiếu nghiệm với điều kiện và kiểm tra lại trong phương trình ban đầu.

Bản đề bài và lời giải đầy đủ. Tệp HTML đi kèm cho phép mở từng lời giải, in riêng đề hoặc in riêng lời giải.

Mục lục

Phần A. Căn bậc hai và căn bậc ba **3**
Bài 1. Căn bậc hai của một số . . . 3
Bài 2. Căn bậc hai số học . . . 4
Bài 3. Căn bậc ba của một số . . . 5
Bài 4. Căn của bình phương . . . 7
Bài 5. Tổng và hiệu các căn . . . 9
Bài 6. So sánh các căn số học . . . 11
Bài 7. So sánh biểu thức chứa căn . . . 12
Bài 8. Điều kiện của căn thức . . . 13
Bài 9. Điều kiện của biểu thức . . . 15
Bài 10. Rút gọn căn thức chứa biến . . . 17

Phần B. Phép tính và rút gọn căn thức **20**
Bài 1. Tính chất căn bậc hai và giá trị tuyệt đối . . . 20
Bài 2. Rút gọn căn lồng . . . 22
Bài 3. Tính giá trị biểu thức . . . 26
Bài 4. Bình phương và xác định dấu . . . 31
Bài 5. Phân tích tử và mẫu thành nhân tử . . . 32
Bài 6. Rút gọn các phân thức . . . 35
Bài 7. Trục căn thức ở mẫu . . . 38
Bài 8. Phối hợp các phép biến đổi . . . 42
Bài 9. Rút gọn phân thức chứa biến . . . 47

Phần C. Phương trình chứa căn **52**
Bài 1. Phương trình quy về một căn . . . 52
Bài 2. Bình phương sau khi xét điều kiện . . . 56
Bài 3. Căn bậc hai ở hai vế . . . 61
Bài 4. Căn của bình phương . . . 63
Bài 5. Căn của bình phương và biểu thức bậc nhất . . . 65
Bài 6. Đối chiếu hai căn thức . . . 68
Bài 7. Tổng hoặc hiệu nhiều căn thức . . . 71
Bài 8. Phương trình căn bậc ba . . . 74

Phần A. Căn bậc hai và căn bậc ba

10 nhóm bài · 86 ý tự luận

Bài 1. Căn bậc hai của một số

Tìm căn bậc hai của mỗi số sau.

Ý 1

$$169$$

Lời giải.

Số dương có hai căn bậc hai đối nhau. Vì $13^2 = (-13)^2 = 169$, hai căn bậc hai là:

$$13 \quad \text{và} \quad -13.$$

Ý 2

$$2{,}25$$

Lời giải.

Vì $(1{,}5)^2 = (-1{,}5)^2 = 2{,}25$, hai căn bậc hai là:

$$1{,}5 \quad \text{và} \quad -1{,}5.$$

Ý 3

$$0{,}64$$

Lời giải.

Vì $(0{,}8)^2 = (-0{,}8)^2 = 0{,}64$, hai căn bậc hai là:

$$0{,}8 \quad \text{và} \quad -0{,}8.$$

Ý 4

$$\frac{36}{121}$$

Lời giải.

Vì $6^2 = 36$, $11^2 = 121$, hai căn bậc hai là:

$$\frac{6}{11} \quad \text{và} \quad -\frac{6}{11}.$$

Ý 5

$$0{,}49$$

Lời giải.

Vì $(0{,}7)^2 = (-0{,}7)^2 = 0{,}49$, hai căn bậc hai là:

$$0{,}7 \quad \text{và} \quad -0{,}7.$$

Ý 6

$$\frac{25}{169}$$

Lời giải.

Vì $5^2 = 25$, $13^2 = 169$, hai căn bậc hai là:

$$\frac{5}{13} \quad \text{và} \quad -\frac{5}{13}.$$

Bài 2. Căn bậc hai số học

Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau.

Ý 1

$$64$$

Lời giải.

Căn bậc hai số học là số không âm. Vì $8^2 = 64$, ta có:

$$\sqrt{64} = 8.$$

Ý 2

$$49$$

Lời giải.

Vì $7 \geq 0$ và $7^2 = 49$, ta có:

$$\sqrt{49} = 7.$$

Ý 3

$$\frac{4}{49}$$

Lời giải.

Tử không âm và mẫu dương. Lấy căn số học của tử và mẫu:

$$\sqrt{\frac{4}{49}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{49}} = \frac{2}{7}.$$

Ý 4

$$81$$

Lời giải.

Vì $9 \geq 0$ và $9^2 = 81$, ta có:

$$\sqrt{81} = 9.$$

Ý 5

$$0{,}04$$

Lời giải.

Vì $0{,}2 \geq 0$ và $(0{,}2)^2 = 0{,}04$, ta có:

$$\sqrt{0{,}04} = 0{,}2.$$

Ý 6

$$1{,}21$$

Lời giải.

Vì $1{,}1 \geq 0$ và $(1{,}1)^2 = 1{,}21$, ta có:

$$\sqrt{1{,}21} = 1{,}1.$$

Bài 3. Căn bậc ba của một số

Tìm căn bậc ba của mỗi số sau.

Ý 1

$$0{,}008$$

Lời giải.

Vì $(0{,}2)^3 = 0{,}008$, nên:

$$\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2.$$

Ý 2

$$-0{,}125$$

Lời giải.

Vì $(-0{,}5)^3 = -0{,}125$, nên:

$$\sqrt[3]{-0{,}125} = -0{,}5.$$

Ý 3

$$216$$

Lời giải.

Vì $6^3 = 216$, nên:

$$\sqrt[3]{216} = 6.$$

Ý 4

$$-0{,}729$$

Lời giải.

Vì $(-0{,}9)^3 = -0{,}729$, nên:

$$\sqrt[3]{-0{,}729} = -0{,}9.$$

Ý 5

$$512$$

Lời giải.

Vì $8^3 = 512$, nên:

$$\sqrt[3]{512} = 8.$$

Ý 6

$$-0{,}001$$

Lời giải.

Vì $(-0{,}1)^3 = -0{,}001$, nên:

$$\sqrt[3]{-0{,}001} = -0{,}1.$$

Ý 7

$$-\frac{125}{8}$$

Lời giải.

Vì $\left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{125}{8}$, nên:

$$\sqrt[3]{-\frac{125}{8}} = -\frac{5}{2}.$$

Ý 8

$$\frac{1}{343}$$

Lời giải.

Vì $7^3 = 343$ và $\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343}$, nên:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{343}} = \frac{1}{7}.$$

Bài 4. Căn của bình phương

Thu gọn các biểu thức. Dùng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

Ý 1

$$\sqrt{3^2} + \sqrt{5^2}$$

Lời giải.

Đưa căn của bình phương về giá trị tuyệt đối:

$$\sqrt{3^2} + \sqrt{5^2} = |3| + |5| = 3 + 5 = 8.$$

Ý 2

$$\sqrt{4^2} + \sqrt{(-2)^4}$$

Lời giải.

Lưu ý $(-2)^4 = 16$, nên căn số học của nó bằng 4:

$$\sqrt{4^2} + \sqrt{(-2)^4} = 4 + \sqrt{16} = 4 + 4 = 8.$$

Ý 3

$$\sqrt{2^2} + \sqrt{(-7)^2}$$

Lời giải.

Căn số học của bình phương luôn không âm:

$$\sqrt{2^2} + \sqrt{(-7)^2} = |2| + |-7| = 2 + 7 = 9.$$

Ý 4

$$\sqrt{(-6)^2} + \sqrt{6^2}$$

Lời giải.

Áp dụng hằng đẳng thức căn của bình phương:

$$\sqrt{(-6)^2} + \sqrt{6^2} = |-6| + |6| = 6 + 6 = 12.$$

Ý 5

$$\sqrt{(-3)^2} - \sqrt{(-1)^4}$$

Lời giải.

Có $(-1)^4 = 1$. Do đó:

$$\sqrt{(-3)^2} - \sqrt{(-1)^4} = 3 - 1 = 2.$$

Ý 6

$$\sqrt{(-11)^2}-\sqrt{(-9)^2}$$

Lời giải.

Thay mỗi căn của bình phương bằng giá trị tuyệt đối:

$$\sqrt{(-11)^2}-\sqrt{(-9)^2}=11-9=2.$$

Ý 7

$$\sqrt{(-11)^2}+\sqrt{(-13)^2}$$

Lời giải.

Thay mỗi căn của bình phương bằng giá trị tuyệt đối:

$$\sqrt{(-11)^2}+\sqrt{(-13)^2}=11+13=24.$$

Ý 8

$$\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$$

Lời giải.

Vì $2>\sqrt{3}$ (do $4>3$), nên $2-\sqrt{3}>0$. Suy ra:

$$\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=|2-\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}.$$

Ý 9

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$$

Lời giải.

Vì $\sqrt{5}>2$ (do $5>4$), nên:

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2.$$

Ý 10

$$\sqrt{(4-\sqrt{9})^2}$$

Lời giải.

Có $\sqrt{9}=3$, nên:

$$\sqrt{(4-\sqrt{9})^2}=|4-3|=1.$$

Ý 11

$$\sqrt{(4-\sqrt{6})^2}$$

Lời giải.

Vì $4>\sqrt{6}$ (do $16>6$), nên:

$$\sqrt{(4-\sqrt{6})^2}=|4-\sqrt{6}|=4-\sqrt{6}.$$

Ý 12

$$\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$$

Lời giải.

Vì $3 < \sqrt{11}$ (do $9 < 11$), nên biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối âm:

$$\sqrt{(3-\sqrt{11})^2} = |3-\sqrt{11}| = \sqrt{11}-3.$$

Ý 13

$$\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$$

Lời giải.

Vì $2\sqrt{2} < 3$ (hai số dương có bình phương lần lượt là 8 và 9), nên:

$$\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} = |2\sqrt{2}-3| = 3-2\sqrt{2}.$$

Ý 14

$$\sqrt{(10-\sqrt{10})^2}$$

Lời giải.

Vì $10 > \sqrt{10}$ (do $100 > 10$), nên:

$$\sqrt{(10-\sqrt{10})^2} = |10-\sqrt{10}| = 10-\sqrt{10}.$$

Ý 15

$$\sqrt{(3-\sqrt{8})^2}$$

Lời giải.

Vì $3 > \sqrt{8}$ và $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, nên:

$$\sqrt{(3-\sqrt{8})^2} = |3-\sqrt{8}| = 3-2\sqrt{2}.$$

Bài 5. Tổng và hiệu các căn

Thu gọn các tổng, hiệu sau.

Ý 1

$$\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$

Lời giải.

Vì $1 < \sqrt{3} < 2$, ta có $2-\sqrt{3} > 0$ và $1-\sqrt{3} < 0$:

$$|2-\sqrt{3}|+|1-\sqrt{3}| = (2-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1) = 1.$$

Ý 2

$$\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$

Lời giải.

Có $3+\sqrt{2}>0$, $1-\sqrt{2}<0$. Suy ra:

$$|3+\sqrt{2}|-|1-\sqrt{2}|=(3+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)=4.$$

Ý 3

$$\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$$

Lời giải.

Có $\sqrt{2}+1>0$, $\sqrt{2}-5<0$. Suy ra:

$$|\sqrt{2}+1|-|\sqrt{2}-5|=(\sqrt{2}+1)-(5-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-4.$$

Ý 4

$$\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2}-\sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$$

Lời giải.

Vì $5>2\sqrt{6}$ (do $25>24$), cả $5-2\sqrt{6}$ và $5+2\sqrt{6}$ đều dương:

$$|5-2\sqrt{6}|-|5+2\sqrt{6}|=(5-2\sqrt{6})-(5+2\sqrt{6})=-4\sqrt{6}.$$

Ý 5

$$\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$$

Lời giải.

Vì $3>2\sqrt{2}$ (do $9>8$), hai biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối đều dương:

$$|3-2\sqrt{2}|+|3+2\sqrt{2}|=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6.$$

Ý 6

$$\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$$

Lời giải.

Vì $\sqrt{5}>\sqrt{2}$, cả hiệu và tổng hai căn đều dương:

$$|\sqrt{5}-\sqrt{2}|+|\sqrt{5}+\sqrt{2}|=(\sqrt{5}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}+\sqrt{2})=2\sqrt{5}.$$

Bài 6. So sánh các căn số học

So sánh hai số trong mỗi ý.

Ý 1

$$\sqrt{120} \quad \text{và} \quad \sqrt{97}$$

Lời giải.

Vì $120 > 97 \geq 0$, lấy căn số học giữ chiều bất đẳng thức:

$$\sqrt{120} > \sqrt{97}.$$

Ý 2

$$\sqrt{81} \quad \text{và} \quad 19$$

Lời giải.

Tính căn số học trước:

$$\sqrt{81} = 9 < 19.$$

Ý 3

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{và} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Lời giải.

Có $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} < \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, các phân số đều dương. Vì thế:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ý 4

$$3 \quad \text{và} \quad \sqrt{8}$$

Lời giải.

Viết $3 = \sqrt{9}$. Do $9 > 8$, nên:

$$3 = \sqrt{9} > \sqrt{8}.$$

Ý 5

$$8 \quad \text{và} \quad \sqrt{63}$$

Lời giải.

Viết $8 = \sqrt{64}$. Do $64 > 63$, nên:

$$8 = \sqrt{64} > \sqrt{63}.$$

Ý 6

$$\sqrt{24} \quad \text{và} \quad 5$$

Lời giải.

Viết $5 = \sqrt{25}$. Do $24 < 25$, nên:

$$\sqrt{24} < \sqrt{25} = 5.$$

Bài 7. So sánh biểu thức chứa căn

So sánh các biểu thức chứa căn.

Ý 1

$$\sqrt{2} + 1 \quad \text{và} \quad 2$$

Lời giải.

Vì $\sqrt{2} > 1$, cộng 1 vào hai vế được:

$$\sqrt{2} + 1 > 2.$$

Ý 2

$$6 \quad \text{và} \quad \sqrt{5} + \sqrt{26}$$

Lời giải.

Vì $\sqrt{5} > 2$ và $\sqrt{26} > 5$, nên:

$$\sqrt{5} + \sqrt{26} > 2 + 5 = 7 > 6.$$

Ý 3

$$\sqrt{7} + \sqrt{15} \quad \text{và} \quad 7$$

Lời giải.

Vì $\sqrt{7} < 3$ và $\sqrt{15} < 4$, nên:

$$\sqrt{7} + \sqrt{15} < 3 + 4 = 7.$$

Ý 4

$$\sqrt{3} + 5 \quad \text{và} \quad \sqrt{2} + \sqrt{11}$$

Lời giải.

Có $\sqrt{3} > 1$, nên vế trái lớn hơn 6. Mặt khác $\sqrt{2} < 2$, $\sqrt{11} < 4$, nên vế phải nhỏ hơn 6:

$$\sqrt{3} + 5 > 6 > \sqrt{2} + \sqrt{11}.$$

Ý 5

$$3+\sqrt{5} \quad \text{và} \quad 2\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

Lời giải.

Hai biểu thức đều dương, nên có thể so sánh bình phương:

$$(3+\sqrt{5})^2 = 14+6\sqrt{5}, \qquad (2\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = 14+8\sqrt{3}.$$

Hai số $6\sqrt{5}$, $8\sqrt{3}$ dương và có bình phương lần lượt là $180 < 192$, nên $6\sqrt{5} < 8\sqrt{3}$. Do đó:

$$3+\sqrt{5} < 2\sqrt{2}+\sqrt{6}.$$

Ý 6

$$2\sqrt{3}+4 \quad \text{và} \quad 3\sqrt{2}+\sqrt{10}$$

Lời giải.

Hai biểu thức đều dương. Bình phương từng biểu thức:

$$(2\sqrt{3}+4)^2 = 28+16\sqrt{3}, \qquad (3\sqrt{2}+\sqrt{10})^2 = 28+12\sqrt{5}.$$

Hai số $16\sqrt{3}$, $12\sqrt{5}$ dương và có bình phương lần lượt là $768 > 720$, nên $16\sqrt{3} > 12\sqrt{5}$. Suy ra:

$$2\sqrt{3}+4 > 3\sqrt{2}+\sqrt{10}.$$

Bài 8. Điều kiện của căn thức

Tìm điều kiện xác định của các căn thức sau.

Ý 1

$$\sqrt{4x}$$

Lời giải.

Điều kiện là biểu thức dưới căn không âm:

$$4x \geq 0 \iff x \geq 0.$$

Ý 2

$$\sqrt{-3x}$$

Lời giải.

Điều kiện $-3x \geq 0$. Khi chia cho số âm, đổi chiều bất đẳng thức:

$$-3x \geq 0 \iff x \leq 0.$$

Ý 3

$$\sqrt{-5x}$$

Lời giải.

Điều kiện $-5x \geq 0$. Chia hai vế cho -5:

$$x \le 0.$$

Ý 4

$$\sqrt{3x+1}$$

Lời giải.

Yêu cầu số dưới căn không âm:

$$3x+1 \ge 0 \iff 3x \ge -1 \iff x \ge -\frac{1}{3}.$$

Ý 5

$$\sqrt{1-6x}$$

Lời giải.

Giải bất phương trình dưới căn:

$$1-6x \ge 0 \iff -6x \ge -1 \iff x \le \frac{1}{6}.$$

Ý 6

$$\sqrt{\frac{4}{3}-2x}$$

Lời giải.

Giải bất phương trình dưới căn:

$$\frac{4}{3}-2x \ge 0 \iff 2x \le \frac{4}{3} \iff x \le \frac{2}{3}.$$

Ý 7

$$\sqrt{-3x-4}$$

Lời giải.

Yêu cầu số dưới căn không âm, rồi đổi chiều khi chia cho -3:

$$-3x-4 \ge 0 \iff -3x \ge 4 \iff x \le -\frac{4}{3}.$$

Ý 8

$$\sqrt{x^2+3}$$

Lời giải.

Với mọi số thực x, có $x^2 \ge 0$, nên $x^2+3 \ge 3 > 0$. Vì thế căn thức xác định với:

$$x \in \mathbb{R}.$$

Ý 9

$$\sqrt{1+3x^2}$$

Lời giải.

Với mọi số thực x, có $1+3x^2 \geq 1 > 0$. Vì thế:

$$x \in \mathbb{R}.$$

Ý 10

$$\sqrt{4-x^2}$$

Lời giải.

Điều kiện $4-x^2 \geq 0$ tương đương $x^2 \leq 4$. Do đó:

$$-2 \leq x \leq 2.$$

Ý 11

$$\sqrt{4x^2-1}$$

Lời giải.

Điều kiện $4x^2-1 \geq 0$ tương đương $x^2 \geq \frac{1}{4}$. Suy ra:

$$x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{hoặc} \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

Ý 12

$$\sqrt{x^2-16}$$

Lời giải.

Điều kiện $x^2-16 \geq 0$ tương đương $x^2 \geq 16$. Vì thế:

$$x \leq -4 \quad \text{hoặc} \quad x \geq 4.$$

Bài 9. Điều kiện của biểu thức

Tìm điều kiện xác định của mỗi biểu thức.

Gợi ý: phân tích biểu thức dưới căn thành nhân tử hoặc bình phương. Căn bậc hai yêu cầu số dưới căn không âm; nếu toàn bộ mẫu chính là căn đó, số dưới căn phải dương.

Ví dụ, với $\sqrt{x^2-4x+3}$, ta có:

$$x^2-4x+3 = (x-1)(x-3).$$

Tích không âm khi hai thừa số cùng không âm hoặc cùng không dương. Vì vậy điều kiện là $x \leq 1$ hoặc $x \geq 3$.

Ý 1

$$\sqrt{x^2 - x + 1}$$

Lời giải.

Hoàn thành bình phương: $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x. Điều kiện:

$$x \in \mathbb{R}.$$

Ý 2

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

Lời giải.

Phân tích $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$. Tích không âm ở ngoài khoảng giữa hai nghiệm và bằng 0 tại hai đầu mút:

$$(x - 3)(x + 1) \geq 0 \iff x \leq -1 \quad \text{hoặc} \quad x \geq 3.$$

Ý 3

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

Lời giải.

Phân tích $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, rồi xét dấu tích:

$$(x - 2)(x - 3) \geq 0 \iff x \leq 2 \quad \text{hoặc} \quad x \geq 3.$$

Ý 4

$$\sqrt{\frac{-2}{x + 1}}$$

Lời giải.

Mẫu phải khác 0. Tử -2 âm và khác 0, nên phân thức không âm khi và chỉ khi mẫu âm:

$$x + 1 < 0 \iff x < -1.$$

Ý 5

$$\sqrt{\frac{1}{-1 + x}}$$

Lời giải.

Tử 1 dương; để phân thức xác định và không âm, mẫu phải dương:

$$x - 1 > 0 \iff x > 1.$$

Ý 6

$$\sqrt{\frac{-5}{3 - 2x}}$$

Lời giải.

Tử -5 âm và khác 0. Phân thức dưới căn không âm và có nghĩa khi mẫu âm:

$$3-2x<0 \iff x>\frac{3}{2}.$$

Ý 7

$$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Lời giải.

Căn nằm ở toàn bộ mẫu nên $2x-x^2=x(2-x)>0$. Tích dương khi x nằm giữa hai nghiệm:

$$0<x<2.$$

Ý 8

$$\frac{2}{\sqrt{x^2-5x+4}}$$

Lời giải.

Mẫu căn phải dương. Phân tích $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$:

$$(x-1)(x-4)>0 \iff x<1 \quad \text{hoặc} \quad x>4.$$

Ý 9

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+9}}$$

Lời giải.

Có $x^2-6x+9=(x-3)^2$. Vì toàn bộ mẫu là căn thức, cần bình phương này dương:

$$(x-3)^2>0 \iff x\neq 3.$$

Bài 10. Rút gọn căn thức chứa biến

Thu gọn các biểu thức, nêu điều kiện xác định nếu đề chưa cho.

Ý 1

$$\sqrt{(x-2)^2} \qquad (x\geq 2)$$

Lời giải.

Với $x\geq 2$, có $x-2\geq 0$. Do đó:

$$\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=x-2.$$

Ý 2

$$\sqrt{(5-x)^2} \qquad (x<5)$$

Lời giải.

Với $x<5$, có $5-x>0$. Do đó:

$$\sqrt{(5-x)^2}=|5-x|=5-x.$$

Ý 3

$$\sqrt{(x-3)^2} \qquad (x<3)$$

Lời giải.

Với $x<3$, có $x-3<0$. Do đó:

$$\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|=3-x.$$

Ý 4

$$\sqrt{(x-7)^4}$$

Lời giải.

Biểu thức xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Viết lũy thừa bậc bốn thành bình phương của $(x-7)^2\geq 0$:

$$\sqrt{(x-7)^4}=\left|(x-7)^2\right|=(x-7)^2.$$

Ý 5

$$\sqrt{25(x+1)^2} \qquad (x>-1)$$

Lời giải.

Với $x>-1$, có $x+1>0$. Suy ra:

$$\sqrt{25(x+1)^2}=5|x+1|=5(x+1).$$

Ý 6

$$\sqrt{x^2(x-5)^2} \qquad (x>5)$$

Lời giải.

Với $x>5$, cả x và $x-5$ đều dương. Suy ra:

$$\sqrt{x^2(x-5)^2}=|x(x-5)|=x(x-5).$$

Ý 7

$$\sqrt{x^2-6x+9}$$

Lời giải.

Hoàn thành bình phương. Biểu thức dưới căn là bình phương nên xác định với mọi số thực x:

$$\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|.$$

Ý 8

$$\sqrt{x^2+8x+16}$$

Lời giải.

Có $x^2+8x+16=(x+4)^2\geq 0$ với mọi số thực x. Vì thế:

$$\sqrt{x^2+8x+16}=|x+4|.$$

Ý 9

$$\sqrt{x^4+2x^2+1}$$

Lời giải.

Có $x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$, trong đó $x^2+1>0$ với mọi x. Do đó:

$$\sqrt{x^4+2x^2+1}=|x^2+1|=x^2+1.$$

Ý 10

$$\sqrt{x-4\sqrt{x}+4}$$

Lời giải.

Căn bên trong yêu cầu $x\geq 0$. Trên miền này, số dưới căn ngoài là $(\sqrt{x}-2)^2\geq 0$, nên không phát sinh điều kiện khác:

$$\sqrt{x-4\sqrt{x}+4}=|\sqrt{x}-2| \qquad (x\geq 0).$$

Ý 11

$$\sqrt{x-8\sqrt{x}+16}$$

Lời giải.

Cần $x\geq 0$. Khi đó $x-8\sqrt{x}+16=(\sqrt{x}-4)^2\geq 0$. Do đó:

$$\sqrt{x-8\sqrt{x}+16}=|\sqrt{x}-4| \qquad (x\geq 0).$$

Ý 12

$$\sqrt{x-10\sqrt{x}+25}$$

Lời giải.

Cần $x\geq 0$. Khi đó $x-10\sqrt{x}+25=(\sqrt{x}-5)^2\geq 0$. Do đó:

$$\sqrt{x-10\sqrt{x}+25}=|\sqrt{x}-5| \qquad (x\geq 0).$$

Phần B. Phép tính và rút gọn căn thức

9 nhóm bài · 106 ý tự luận

Bài 1. Tính chất căn bậc hai và giá trị tuyệt đối

Dùng tính chất căn bậc hai và giá trị tuyệt đối.

Ý 1

$$\sqrt{18x}\,\sqrt{8x}$$

x ≥ 0.

Lời giải.

Vì x ≥ 0, hai căn đều có nghĩa. Gộp hai căn rồi dùng căn của bình phương:

$$\sqrt{18x}\sqrt{8x} = \sqrt{144x^2} = 12|x| = 12x.$$

Ý 2

$$\sqrt{6y}\,\sqrt{24y}$$

y < 0.

Lời giải.

Với y < 0, cả 6y và 24y đều âm. Vì vậy hai căn bậc hai không xác định trong tập số thực; biểu thức không có giá trị thực. Không được gộp hai căn không có nghĩa thành một căn của tích.

Ý 3

$$\sqrt{75(x-18)^2}$$

x > 18.

Lời giải.

Đưa thừa số bình phương ra ngoài căn bằng giá trị tuyệt đối, rồi dùng điều kiện dấu đã cho:

$$\sqrt{75(x-18)^2} = 5\sqrt{3}\,|x-18| = 5(x-18)\sqrt{3}$$

Kết quả được giữ trên đúng điều kiện của đề.

Ý 4

$$\sqrt{54(2-x)^2}$$

x < 2.

Lời giải.

Đưa thừa số bình phương ra ngoài căn bằng giá trị tuyệt đối, rồi dùng điều kiện dấu đã cho:

$$\sqrt{54(2-x)^2} = 3\sqrt{6}\,|2-x| = 3(2-x)\sqrt{6}$$

Kết quả được giữ trên đúng điều kiện của đề.

Ý 5

$$\sqrt{180(x-7)^2}$$

x < 7.

Lời giải.

Đưa thừa số bình phương ra ngoài căn bằng giá trị tuyệt đối, rồi dùng điều kiện dấu đã cho:

$$\sqrt{180(x-7)^2} = 6\sqrt{5}\,|x-7| = 6(7-x)\sqrt{5}$$

Kết quả được giữ trên đúng điều kiện của đề.

Ý 6

$$\sqrt{175(x^2-4x+4)}$$

x > 2.

Lời giải.

Đưa thừa số bình phương ra ngoài căn bằng giá trị tuyệt đối, rồi dùng điều kiện dấu đã cho:

$$\sqrt{175(x-2)^2} = 5\sqrt{7}\,|x-2| = 5(x-2)\sqrt{7}$$

Kết quả được giữ trên đúng điều kiện của đề.

Ý 7

$$\sqrt{96(9x^2-12x+4)}$$

$x < \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Đưa thừa số bình phương ra ngoài căn bằng giá trị tuyệt đối, rồi dùng điều kiện dấu đã cho:

$$\sqrt{96(3x-2)^2} = 4\sqrt{6}\,|3x-2| = 4(2-3x)\sqrt{6}$$

Kết quả được giữ trên đúng điều kiện của đề.

Ý 8

$$\sqrt{0{,}6}\,\sqrt{150(x-1)^2}$$

x ≤ 1.

Lời giải.

Đưa thừa số bình phương ra ngoài căn bằng giá trị tuyệt đối, rồi dùng điều kiện dấu đã cho:

$$\sqrt{90(x-1)^2} = 3\sqrt{10}\,|x-1| = 3(1-x)\sqrt{10}$$

Kết quả được giữ trên đúng điều kiện của đề.

Ý 9

$$\sqrt{36x^4} - 5x^2 + 3$$

x là số thực.

Lời giải.

Đưa thừa số bình phương ra ngoài căn bằng giá trị tuyệt đối, rồi dùng điều kiện dấu đã cho:

$$\sqrt{36x^4} = 6|x^2| = 6x^2 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 - 5x^2 + 3 = x^2 + 3$$

Kết quả được giữ trên đúng điều kiện của đề.

Ý 10

$$\sqrt{81x^4} - 21x^2 + 7$$

x là số thực.

Lời giải.

Đưa thừa số bình phương ra ngoài căn bằng giá trị tuyệt đối, rồi dùng điều kiện dấu đã cho:

$$\sqrt{81x^4} = 9|x^2| = 9x^2 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 - 21x^2 + 7 = 7 - 12x^2$$

Kết quả được giữ trên đúng điều kiện của đề.

Ý 11

$$\frac{3}{x-y}\sqrt{x^4(x-y)^2}$$

x > y.

Lời giải.

Đưa thừa số bình phương ra ngoài căn bằng giá trị tuyệt đối, rồi dùng điều kiện dấu đã cho:

$$\sqrt{x^4(x-y)^2} = x^2|x-y| = x^2(x-y) \quad \Rightarrow \quad \frac{3x^2(x-y)}{x-y} = 3x^2$$

Kết quả được giữ trên đúng điều kiện của đề.

Ý 12

$$\frac{3}{x-2y}\sqrt{16x^8(2y-x)^2}$$

x > 2y.

Lời giải.

Đưa thừa số bình phương ra ngoài căn bằng giá trị tuyệt đối, rồi dùng điều kiện dấu đã cho:

$$\sqrt{16x^8(2y-x)^2} = 4x^4|2y-x| = 4x^4(x-2y) \quad \Rightarrow \quad 12x^4$$

Kết quả được giữ trên đúng điều kiện của đề.

Bài 2. Rút gọn căn lồng

Rút gọn căn lồng bằng hằng đẳng thức.

Ý 1

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$4 - 2\sqrt{3} = \left(-1+\sqrt{3}\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=-1+\sqrt{3}$$

Ý 2

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$5-2\sqrt{6}=\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

Ý 3

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$7-2\sqrt{10}=\left(-\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}}=-\sqrt{2}+\sqrt{5}$$

Ý 4

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$12\sqrt{2}+17=\left(2\sqrt{2}+3\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+3$$

Ý 5

$$\sqrt{11-4\sqrt{7}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$11-4\sqrt{7}=\left(-2+\sqrt{7}\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{11-4\sqrt{7}}=-2+\sqrt{7}$$

Ý 6

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$6\sqrt{5}+14=\left(\sqrt{5}+3\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}}=\sqrt{5}+3$$

Ý 7

$$\sqrt{8-\sqrt{28}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$8-2\sqrt{7}=\left(-1+\sqrt{7}\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{8-\sqrt{28}}=-1+\sqrt{7}$$

Ý 8

$$\sqrt{11+\sqrt{112}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$4\sqrt{7}+11=\left(2+\sqrt{7}\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{11+\sqrt{112}}=2+\sqrt{7}$$

Ý 9

$$\sqrt{15-\sqrt{216}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$15-6\sqrt{6}=\left(3-\sqrt{6}\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{15-\sqrt{216}}=3-\sqrt{6}$$

Ý 10

$$\sqrt{74+40\sqrt{3}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$40\sqrt{3}+74=\left(2\sqrt{6}+5\sqrt{2}\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{74+40\sqrt{3}}=2\sqrt{6}+5\sqrt{2}$$

Ý 11

$$\sqrt{23-6\sqrt{10}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$23-6\sqrt{10}=\left(-\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{23-6\sqrt{10}}=-\sqrt{5}+3\sqrt{2}$$

Ý 12

$$\sqrt{52+6\sqrt{35}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$6\sqrt{35}+52=\left(\sqrt{7}+3\sqrt{5}\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{52+6\sqrt{35}}=\sqrt{7}+3\sqrt{5}$$

Ý 13

$$\sqrt{13-2\sqrt{40}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$13-4\sqrt{10}=\left(-\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{13-2\sqrt{40}}=-\sqrt{5}+2\sqrt{2}$$

Ý 14

$$\sqrt{53+2\sqrt{360}}$$

Lời giải.

Nhận dạng hằng đẳng thức bình phương một tổng hoặc một hiệu:

$$12\sqrt{10}+53=\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)^2$$

Biểu thức trong ngoặc không âm, nên:

$$\sqrt{53+2\sqrt{360}}=2\sqrt{2}+3\sqrt{5}$$

Bài 3. Tính giá trị biểu thức

Tính giá trị biểu thức chứa căn.

Ý 1

$$\sqrt{49-12\sqrt{5}}-\sqrt{49+12\sqrt{5}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{49-12\sqrt{5}}=3\sqrt{5}-2;\quad \sqrt{49+12\sqrt{5}}=3\sqrt{5}+2$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$\sqrt{49-12\sqrt{5}}-\sqrt{49+12\sqrt{5}}=-4$$

Ý 2

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{22-12\sqrt{2}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}}=2-\sqrt{2};\quad \sqrt{22-12\sqrt{2}}=3\sqrt{2}-2$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{22-12\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

Ý 3

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}-\sqrt{9+4\sqrt{2}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2};\quad \sqrt{9+4\sqrt{2}}=1+2\sqrt{2}$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}-\sqrt{9+4\sqrt{2}}=2-4\sqrt{2}$$

Ý 4

$$\sqrt{24+8\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{24+8\sqrt{5}}=2\sqrt{5}+2;\quad \sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$\sqrt{24+8\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$$

Ý 5

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2};\quad (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3-2$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{5+2\sqrt{6}}=1$$

Ý 6

$$(2+\sqrt{3})\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3};\quad (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$(2+\sqrt{3})\sqrt{7-4\sqrt{3}}=1$$

Ý 7

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2};\quad \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}=\frac{6-2}{2}$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}(\sqrt{6}+\sqrt{2})=2$$

Ý 8

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2};\quad (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3-2$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{5+2\sqrt{6}}=1$$

Ý 9

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})\sqrt{8-2\sqrt{15}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3};\quad (\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=5-3$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})\sqrt{8-2\sqrt{15}}=2$$

Ý 10

$$(\sqrt{6}+\sqrt{10})\sqrt{4-\sqrt{15}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{4-\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2};\quad \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{10})(\sqrt{10}-\sqrt{6})}{2}=2$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$(\sqrt{6}+\sqrt{10})\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$$

Ý 11

$$(5+2\sqrt{3})\sqrt{37-20\sqrt{3}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{37-20\sqrt{3}}=5-2\sqrt{3};\quad (5+2\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})=25-12$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$(5+2\sqrt{3})\sqrt{37-20\sqrt{3}}=13$$

Ý 12

$$(\sqrt{10}+\sqrt{6})\sqrt{8-2\sqrt{15}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3};\quad (\sqrt{10}+\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=\sqrt{2}(5-3)$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$(\sqrt{10}+\sqrt{6})\sqrt{8-2\sqrt{15}}=2\sqrt{2}$$

Ý 13

$$(\sqrt{10}-\sqrt{14})\sqrt{6+\sqrt{35}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{6+\sqrt{35}}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{10}}{2}$$
$$\frac{(\sqrt{10}-\sqrt{14})(\sqrt{14}+\sqrt{10})}{2}=-2$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$(\sqrt{10}-\sqrt{14})\sqrt{6+\sqrt{35}}=-2$$

Ý 14

$$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$$

Lời giải.

Xét các căn từ trong ra ngoài:

$$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-3$$

$$9-(2\sqrt{5}-3)=12-2\sqrt{5}>5$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì 7 > 2√5. Do đó căn ở giữa lớn hơn √5, làm biểu thức dưới căn ngoài âm. Biểu thức không xác định trong tập số thực.

Ý 15

$$\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{9+4\sqrt{2}}=1+2\sqrt{2};\quad \sqrt{2+1+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2};\quad 13+30(1+\sqrt{2})=(5+3\sqrt{2})^2$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}=3\sqrt{2}+5$$

Ý 16

$$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{29-6\sqrt{20}}=\sqrt{29-12\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-3;\quad \sqrt{3-(2\sqrt{5}-3)}=\sqrt{5}-1$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}=1$$

Ý 19

$$\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48}-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{48}=4\sqrt{3};\quad \sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3};\quad 5\sqrt{3}+20\sqrt{3}-10(2+\sqrt{3})=15\sqrt{3}-20$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48}-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}=\sqrt{-20+15\sqrt{3}}$$

Vì 15√3 > 20, căn cuối có nghĩa trong tập số thực.

Ý 20

$$\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn bằng hằng đẳng thức, luôn lấy giá trị không âm:

$$\sqrt{128}=8\sqrt{2}$$
$$\sqrt{18-8\sqrt{2}}=4-\sqrt{2}$$
$$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4-\sqrt{2}}=1+\sqrt{3}$$
$$6-2(1+\sqrt{3})=(\sqrt{3}-1)^2$$

Thay vào biểu thức và thu gọn:

$$\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}}=-1+\sqrt{3}$$

Bài 4. Bình phương và xác định dấu

Bình phương biểu thức rồi xác định dấu.

Ý 1

$$A=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Lời giải.

Xét dấu biểu thức trước khi lấy căn của bình phương. Dùng (a ± b)² = a² ± 2ab + b²:

$$A>0,\quad A^2=4-2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=4-2=2,\quad A=\sqrt{2}$$

Ý 2

$$B=\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$$

Lời giải.

Xét dấu biểu thức trước khi lấy căn của bình phương. Dùng (a ± b)² = a² ± 2ab + b²:

$$B<0,\quad B^2=8-2\sqrt{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}=8-6=2,\quad B=-\sqrt{2}$$

Ý 3

$$C=\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}$$

Lời giải.

Xét dấu biểu thức trước khi lấy căn của bình phương. Dùng (a ± b)² = a² ± 2ab + b²:

$$C>0,\quad C^2=12+2\sqrt{36-11}=22,\quad C=\sqrt{22}$$

Ý 4

$$D=\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}$$

Lời giải.

Xét dấu biểu thức trước khi lấy căn của bình phương. Dùng (a ± b)² = a² ± 2ab + b²:

$$D>0,\quad D^2=8+2\sqrt{16-15}=10,\quad D=\sqrt{10}$$

Bài 5. Phân tích tử và mẫu thành nhân tử

Phân tích tử và mẫu thành nhân tử.

Ý 1

$$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn rồi đặt nhân tử chung ở tử và mẫu. Các mẫu và nhân tử triệt tiêu đều khác 0:

$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{7}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Thu gọn; trục căn ở mẫu nếu còn cần:

$$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

Ý 2

$$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn rồi đặt nhân tử chung ở tử và mẫu. Các mẫu và nhân tử triệt tiêu đều khác 0:

$$\frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Thu gọn; trục căn ở mẫu nếu còn cần:

$$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ý 3

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn rồi đặt nhân tử chung ở tử và mẫu. Các mẫu và nhân tử triệt tiêu đều khác 0:

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})}{2(\sqrt{3}+\sqrt{7})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Thu gọn; trục căn ở mẫu nếu còn cần:

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ý 4

$$\frac{9\sqrt{5}+3\sqrt{27}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn rồi đặt nhân tử chung ở tử và mẫu. Các mẫu và nhân tử triệt tiêu đều khác 0:

$$\frac{9(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=9$$

Thu gọn; trục căn ở mẫu nếu còn cần:

$$\frac{9\sqrt{5}+3\sqrt{27}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=9$$

Ý 5

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn rồi đặt nhân tử chung ở tử và mẫu. Các mẫu và nhân tử triệt tiêu đều khác 0:

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})}{2(\sqrt{3}+\sqrt{7})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Thu gọn; trục căn ở mẫu nếu còn cần:

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ý 6

$$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{\sqrt{8}-\sqrt{12}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn rồi đặt nhân tử chung ở tử và mẫu. Các mẫu và nhân tử triệt tiêu đều khác 0:

$$\frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Thu gọn; trục căn ở mẫu nếu còn cần:

$$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{\sqrt{8}-\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ý 7

$$\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn rồi đặt nhân tử chung ở tử và mẫu. Các mẫu và nhân tử triệt tiêu đều khác 0:

$$\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

Thu gọn; trục căn ở mẫu nếu còn cần:

$$\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Ý 8

$$\frac{5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn rồi đặt nhân tử chung ở tử và mẫu. Các mẫu và nhân tử triệt tiêu đều khác 0:

$$\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{2(\sqrt{5}-2)}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Thu gọn; trục căn ở mẫu nếu còn cần:

$$\frac{5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ý 9

$$\frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn rồi đặt nhân tử chung ở tử và mẫu. Các mẫu và nhân tử triệt tiêu đều khác 0:

$$\frac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{2}{3}$$

Thu gọn; trục căn ở mẫu nếu còn cần:

$$\frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}=\frac{2}{3}$$

Ý 10

$$\frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$$

Lời giải.

Rút gọn các căn rồi đặt nhân tử chung ở tử và mẫu. Các mẫu và nhân tử triệt tiêu đều khác 0:

$$\frac{(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

Thu gọn; trục căn ở mẫu nếu còn cần:

$$\frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}=-\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$$

Bài 6. Rút gọn các phân thức

Rút gọn từng phân thức rồi thực hiện phép tính.

Ý 1

$$\frac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}+\frac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

Lời giải.

Đưa các căn về dạng đơn giản, phân tích nhân tử chung hoặc nhân với liên hợp. Từng số hạng, kể cả dấu đứng trước, được rút gọn như sau:

$$\frac{6-\sqrt{6}}{-1+\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{6}\,(6-\sqrt{6})}{6}=-1+\sqrt{6}$$

Cộng các kết quả và thu gọn các căn đồng dạng:

$$(\sqrt{6})+(-1+\sqrt{6})=-1+2\sqrt{6}$$

Ý 2

$$\frac{6-6\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}+\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

Lời giải.

Đưa các căn về dạng đơn giản, phân tích nhân tử chung hoặc nhân với liên hợp. Từng số hạng, kể cả dấu đứng trước, được rút gọn như sau:

$$\frac{6-6\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=6$$

$$\frac{\sqrt{3}+3}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

Cộng các kết quả và thu gọn các căn đồng dạng:

$$(6)+(\sqrt{3})=\sqrt{3}+6$$

Ý 3

$$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2}+\frac{6+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Lời giải.

Đưa các căn về dạng đơn giản, phân tích nhân tử chung hoặc nhân với liên hợp. Từng số hạng, kể cả dấu đứng trước, được rút gọn như sau:

$$\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{-2+\sqrt{5}}=\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{6}+6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

Cộng các kết quả và thu gọn các căn đồng dạng:

$$(\sqrt{3})+(2\sqrt{3})=3\sqrt{3}$$

Ý 4

$$\frac{3\sqrt{2}-6}{\sqrt{2}-1}+\frac{6\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}-3}$$

Lời giải.

Đưa các căn về dạng đơn giản, phân tích nhân tử chung hoặc nhân với liên hợp. Từng số hạng, kể cả dấu đứng trước, được rút gọn như sau:

$$\frac{-6+3\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}=-3\sqrt{2}$$

$$\frac{-4+6\sqrt{2}}{-3+\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$$

Cộng các kết quả và thu gọn các căn đồng dạng:

$$(-3\sqrt{2})+(-2\sqrt{2})=-5\sqrt{2}$$

Ý 5

$$\frac{\sqrt{160}-\sqrt{80}}{\sqrt{8}-2}-\frac{\sqrt{40}-\sqrt{15}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

Lời giải.

Đưa các căn về dạng đơn giản, phân tích nhân tử chung hoặc nhân với liên hợp. Từng số hạng, kể cả dấu đứng trước, được rút gọn như sau:

$$\frac{-4\sqrt{5}+4\sqrt{10}}{-2+2\sqrt{2}}=2\sqrt{5}$$

$$\frac{-2\sqrt{10}+\sqrt{15}}{-\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=-\sqrt{5}$$

Cộng các kết quả và thu gọn các căn đồng dạng:

$$(2\sqrt{5})+(-\sqrt{5})=\sqrt{5}$$

Ý 6

$$\frac{5\sqrt{7}-\sqrt{21}}{\sqrt{75}-3}+\frac{10-5\sqrt{5}}{\sqrt{12}-\sqrt{15}}$$

Lời giải.

Đưa các căn về dạng đơn giản, phân tích nhân tử chung hoặc nhân với liên hợp. Từng số hạng, kể cả dấu đứng trước, được rút gọn như sau:

$$\frac{-\sqrt{21}+5\sqrt{7}}{-3+5\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$\frac{10-5\sqrt{5}}{-\sqrt{15}+2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Cộng các kết quả và thu gọn các căn đồng dạng:

$$(\frac{\sqrt{21}}{3})+(\frac{5\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt{21}}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Ý 7

$$\frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$$

Lời giải.

Đưa các căn về dạng đơn giản, phân tích nhân tử chung hoặc nhân với liên hợp. Từng số hạng, kể cả dấu đứng trước, được rút gọn như sau:

$$\frac{-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{-4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}+9\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Cộng các kết quả và thu gọn các căn đồng dạng:

$$(-\frac{\sqrt{6}}{3})+(-\frac{\sqrt{6}}{6})=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Ý 8

$$\frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$$

Lời giải.

Đưa các căn về dạng đơn giản, phân tích nhân tử chung hoặc nhân với liên hợp. Từng số hạng, kể cả dấu đứng trước, được rút gọn như sau:

$$\frac{-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{-4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}+9\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Cộng các kết quả và thu gọn các căn đồng dạng:

$$(-\frac{\sqrt{6}}{3})+(-\frac{\sqrt{6}}{6})=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Bài 7. Trục căn thức ở mẫu

Trục căn thức ở mẫu.

Ý 1

$$\frac{1}{1+\sqrt{5}}+\frac{1}{1-\sqrt{5}}$$

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp. Dùng $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; tất cả mẫu trong đề khác 0:

$$\frac{1}{1+\sqrt{5}}=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{1}{1-\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{4}$$

Thực hiện phép cộng các số hạng đã rút gọn:

$$\frac{1}{1+\sqrt{5}}+\frac{1}{1-\sqrt{5}}=-\frac{1}{2}$$

Ý 2

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp. Dùng $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; tất cả mẫu trong đề khác 0:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$-\frac{1}{-\sqrt{3}+\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Thực hiện phép cộng các số hạng đã rút gọn:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$$

Ý 3

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp. Dùng $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; tất cả mẫu trong đề khác 0:

$$\frac{1}{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

Thực hiện phép cộng các số hạng đã rút gọn:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-2\sqrt{3}$$

Ý 4

$$\frac{1}{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}-3}$$

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp. Dùng $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; tất cả mẫu trong đề khác 0:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+3}=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{1}{-3+\sqrt{5}}=-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$$

Thực hiện phép cộng các số hạng đã rút gọn:

$$\frac{1}{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}-3}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ý 5

$$\frac{1}{5+2\sqrt{6}}-\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$$

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp. Dùng $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; tất cả mẫu trong đề khác 0:

$$\frac{1}{2\sqrt{6}+5}=5-2\sqrt{6}$$

$$-\frac{1}{5-2\sqrt{6}}=-5-2\sqrt{6}$$

Thực hiện phép cộng các số hạng đã rút gọn:

$$\frac{1}{5+2\sqrt{6}}-\frac{1}{5-2\sqrt{6}}=-4\sqrt{6}$$

Ý 6

$$\frac{2}{\sqrt{5}-2}+\frac{-2}{\sqrt{5}+2}$$

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp. Dùng $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; tất cả mẫu trong đề khác 0:

$$\frac{2}{-2+\sqrt{5}}=4+2\sqrt{5}$$

$$-\frac{2}{2+\sqrt{5}}=4-2\sqrt{5}$$

Thực hiện phép cộng các số hạng đã rút gọn:

$$\frac{2}{\sqrt{5}-2}+\frac{-2}{\sqrt{5}+2}=8$$

Ý 7

$$\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{18}+2\sqrt{3}}$$

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp. Dùng $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; tất cả mẫu trong đề khác 0:

$$\frac{4}{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-4\sqrt{3}-4\sqrt{2}$$

$$-\frac{3}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}$$

Thực hiện phép cộng các số hạng đã rút gọn:

$$\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{18}+2\sqrt{3}}=-\frac{11\sqrt{2}}{2}-3\sqrt{3}$$

Ý 8

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{2}{1-\sqrt{7}}$$

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp. Dùng $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; tất cả mẫu trong đề khác 0:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{2}{1-\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{1}{3}$$

Thực hiện phép cộng các số hạng đã rút gọn:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{2}{1-\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{6}$$

Ý 9

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp. Dùng $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; tất cả mẫu trong đề khác 0:

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}-2$$

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

Thực hiện phép cộng các số hạng đã rút gọn:

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=-3\sqrt{3}$$

Ý 10

$$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\frac{6}{1-\sqrt{5}}$$

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp. Dùng $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; tất cả mẫu trong đề khác 0:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{6}{1-\sqrt{5}}=-\frac{3\sqrt{5}}{2}-\frac{3}{2}$$

Thực hiện phép cộng các số hạng đã rút gọn:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\frac{6}{1-\sqrt{5}}=-2\sqrt{5}$$

Ý 11

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$$

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp. Dùng $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; tất cả mẫu trong đề khác 0:

$$\frac{-1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$$

$$\frac{-3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3}=-\frac{11}{7}+\frac{6\sqrt{2}}{7}$$

Thực hiện phép cộng các số hạng đã rút gọn:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{10}{7}-\frac{8\sqrt{2}}{7}$$

Ý 12

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$$

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp. Dùng $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; tất cả mẫu trong đề khác 0:

$$\frac{\sqrt{3}}{-1+\sqrt{1+\sqrt{3}}}=1+\sqrt{1+\sqrt{3}}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{1+\sqrt{3}}}=1-\sqrt{1+\sqrt{3}}$$

Thực hiện phép cộng các số hạng đã rút gọn:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}=2$$

Bài 8. Phối hợp các phép biến đổi

Phối hợp trục căn, quy đồng và phép tính.

Ý 1

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-\frac{2}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$\frac{3}{-\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\sqrt{2}+\sqrt{5}$$

$$-\frac{2}{2-\sqrt{2}}=-2-\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

Cộng các số hạng, sau đó thực hiện phép nhân nếu có:

$$\left(-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)(1)=-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

Ý 2

$$\frac{-4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{4-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$-\frac{4}{-\sqrt{5}+\sqrt{7}}=-2\sqrt{7}-2\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{-1+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{4-2\sqrt{5}}{-2+\sqrt{5}}=-2$$

Cộng các số hạng, sau đó thực hiện phép nhân nếu có:

$$\left(-2\sqrt{7}-2\sqrt{5}-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1)$$
$$=-2\sqrt{7}-2\sqrt{5}-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ý 3

$$\frac{5}{3-\sqrt{7}}-\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$\frac{5}{3-\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{2}+\frac{15}{2}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

Cộng các số hạng, sau đó thực hiện phép nhân nếu có:

$$\left(-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{7}}{2}+\frac{15}{2}\right)(1)$$
$$=-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{7}}{2}+\frac{15}{2}$$

Ý 4

$$\frac{\sqrt{12}-6}{\sqrt{8}-\sqrt{24}}-\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{4}{1-\sqrt{7}}$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$\frac{-6+2\sqrt{3}}{-2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}\left(-3-\sqrt{3}\right)}{3}=-\sqrt{3}-1$$

$$\frac{4}{1-\sqrt{7}}=-\frac{2\sqrt{7}}{3}-\frac{2}{3}$$

Cộng các số hạng, sau đó thực hiện phép nhân nếu có:

$$\left(-\frac{2\sqrt{7}}{3}-\sqrt{3}-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)(1)$$
$$=-\frac{2\sqrt{7}}{3}-\sqrt{3}-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Ý 5

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$\frac{1}{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$-\frac{1}{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{-\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Cộng các số hạng, sau đó thực hiện phép nhân nếu có:

$$\left(-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}+\sqrt{5}\right)(1)$$
$$=-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}+\sqrt{5}$$

Ý 6

$$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\frac{2}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{6}+5}}=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{15}+8}}=-\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

Cộng các số hạng, sau đó thực hiện phép nhân nếu có:

$$\left(\sqrt{5}\right)(1)=\sqrt{5}$$

Ý 7

$$\frac{15}{3-\sqrt{3}}-\frac{2}{1-\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$\frac{15}{3-\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{15}{2}$$

$$-\frac{2}{1-\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$$

$$\frac{3}{-2+\sqrt{3}}=-6-3\sqrt{3}$$

Cộng các số hạng, sau đó thực hiện phép nhân nếu có:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\right)(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}$$

Ý 8

$$\left(\frac{12}{\sqrt{5}+1}-\frac{4}{\sqrt{5}+2}+\frac{20}{3+\sqrt{5}}\right)(10+3\sqrt{5})$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$\frac{12}{1+\sqrt{5}} = -3+3\sqrt{5}$$

$$-\frac{4}{2+\sqrt{5}} = 8-4\sqrt{5}$$

$$\frac{20}{\sqrt{5}+3} = 15-5\sqrt{5}$$

Cộng các số hạng, sau đó thực hiện phép nhân nếu có:

$$\left(20-6\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}+10\right) = 110$$

Ý 9

$$\left(\frac{24}{\sqrt{7}+1}+\frac{4}{3+\sqrt{7}}-\frac{3}{\sqrt{7}+2}\right)(4-\sqrt{7})$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$\frac{24}{1+\sqrt{7}} = -4+4\sqrt{7}$$

$$\frac{4}{\sqrt{7}+3} = 6-2\sqrt{7}$$

$$-\frac{3}{2+\sqrt{7}} = 2-\sqrt{7}$$

Cộng các số hạng, sau đó thực hiện phép nhân nếu có:

$$\left(\sqrt{7}+4\right)\left(4-\sqrt{7}\right) = 9$$

Ý 10

$$\left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$\frac{-\sqrt{7}+\sqrt{14}}{1-\sqrt{2}} = -\sqrt{7}$$

$$\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{15}}{1-\sqrt{3}} = -\sqrt{5}$$

Đổi phép chia thành phép nhân với nghịch đảo. Số chia khác 0:

$$\left(-\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{7}\right) = -2$$

Ý 11

$$\left(1+\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}+1\right)$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}+1=1-\sqrt{5}$$

$$1+\frac{\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}}=1+\sqrt{5}$$

Nhân hai thừa số đã thu gọn:

$$(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})=-4$$

Ý 12

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{5}}\right):\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1-\sqrt{3}}=-\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{5}=-\sqrt{5}$$

Đổi phép chia thành phép nhân với nghịch đảo. Số chia khác 0:

$$\left(-\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=-3$$

Ý 13

$$\left(\frac{\sqrt{24}-2}{2}+\sqrt{5}+1\right):\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$-1+\sqrt{6}=-1+\sqrt{6}$$

$$1+\sqrt{5}=1+\sqrt{5}$$

Đổi phép chia thành phép nhân với nghịch đảo. Số chia khác 0:

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)=1$$

Ý 14

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}+\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\right):\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

Lời giải.

Rút gọn các phân thức bằng nhân tử chung hoặc biểu thức liên hợp:

$$\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{-1+\sqrt{2}}=\sqrt{3}$$

$$\frac{5-\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

Đổi phép chia thành phép nhân với nghịch đảo. Số chia khác 0:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=1$$

Bài 9. Rút gọn phân thức chứa biến

Rút gọn phân thức chứa biến và giữ điều kiện.

Ý 1

$$\frac{x+\sqrt{xy}}{y+\sqrt{xy}}$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $xy\geq 0,\ y+\sqrt{xy}\neq 0$.

Đặt z = √(xy). Mẫu khác 0 kéo theo y ≠ 0; vì z² = xy nên x = z²/y. Do đó:

$$\frac{x+z}{y+z}=\frac{z^2+yz}{y(y+z)}=\frac{z(y+z)}{y(y+z)}=\frac{z}{y}=\frac{\sqrt{xy}}{y}$$

Cách biến đổi này dùng được cả khi x, y cùng âm. Không tự tách √(xy) thành √x√y nếu chưa biết x, y không âm.

Ý 2

$$\frac{x+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y>0$.

Với điều kiện đã nêu, đặt t = √x, u = √y; t + u > 0. Khi đó:

$$\frac{t^2+tu}{t+u}=\frac{t(t+u)}{t+u}=t=\sqrt{x}$$

Ý 3

$$\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x>0,\ y>0,\ x\neq y$.

Đặt t = √x > 0, u = √y > 0, t ≠ u. Đổi phép chia thành nhân với nghịch đảo:

$$\frac{t^2u+u^2t}{tu} : \frac{1}{t-u} = (t+u)(t-u) = t^2-u^2 = x-y$$

Ý 4

$$\frac{\sqrt{x}+x\sqrt{y}-\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{xy-1}$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x\geq 0,\ y\geq 0,\ xy\neq 1$.

Đặt t = √x, u = √y. Mẫu xy − 1 khác 0, nên tu ≠ 1. Phân tích thành nhân tử:

$$\frac{t+t^2u-u-u^2t}{t^2u^2-1} = \frac{(t-u)(1+tu)}{(tu-1)(tu+1)}$$
$$= \frac{t-u}{tu-1} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}-1}$$

Ý 5

$$\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y>0$.

Đặt t = √x, u = √y; dùng tổng hai lập phương:

$$\frac{t^3+u^3}{t+u} - (t-u)^2 = t^2-tu+u^2-(t^2-2tu+u^2) = tu = \sqrt{xy}$$

Ý 6

$$\frac{x^2-5}{x+\sqrt{5}} + \frac{x^2-10\sqrt{x}+25}{x-\sqrt{5}}$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x\geq 0,\ x\neq \sqrt{5}$.

Điều kiện căn là x ≥ 0; mẫu x − √5 phải khác 0. Phân tích hiệu hai bình phương ở phân thức đầu:

$$\frac{x^2-5}{x+\sqrt{5}} = x-\sqrt{5}$$

Quy đồng với phân thức còn lại:

$$x-\sqrt{5}+\frac{x^2-10\sqrt{x}+25}{x-\sqrt{5}}=\frac{(x-\sqrt{5})^2+x^2-10\sqrt{x}+25}{x-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2x^2-2\sqrt{5}x-10\sqrt{x}+30}{x-\sqrt{5}}=2x+\frac{10(3-\sqrt{x})}{x-\sqrt{5}}$$

Giữ x ≠ √5. Biểu thức x² − 10√x + 25 không phải (√x − 5)².

Ý 7

$$\frac{x+4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}+\frac{4-x}{\sqrt{x}-2}$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x\geq 0,\ x\neq 4$.

Đặt t = √x, t ≠ 2. Phân tích tử thành nhân tử rồi triệt tiêu nhân tử chung khác 0:

$$\frac{(t+2)^2}{t+2}+\frac{(2-t)(2+t)}{t-2}=(t+2)-(t+2)=0$$

Ý 8

$$\frac{9-x}{\sqrt{x}+3}-\frac{9-6\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-3}$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x\geq 0,\ x\neq 9$.

Đặt t = √x, t ≠ 3. Khi đó:

$$\frac{9-t^2}{t+3}-\frac{(t-3)^2}{t-3}=3-t-(t-3)=6-2t=6-2\sqrt{x}$$

Ý 9

$$\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y>0$.

Đặt t = √x, u = √y; t + u > 0. Khi đó:

$$\frac{(t+u)^2}{t+u}-\frac{(t-u)(t+u)}{t+u}=(t+u)-(t-u)=2u=2\sqrt{y}$$

Ý 10

$$\left(\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)^2$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x\geq 0,\ x\neq 1$.

Đặt t = √x ≥ 0, t ≠ 1. Phân tích 1 − t³ và 1 − t²:

$$\left(\frac{1-t^3}{1-t}+t\right)\left(\frac{1-t}{1-t^2}\right)^2=(1+t+t^2+t)\frac{1}{(1+t)^2}=1$$

Ý 11

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x>0,\ y>0$.

Đặt t = √x > 0, u = √y > 0. Hai phân thức đều rút gọn về t + u:

$$\frac{(t-u)^2+4tu}{t+u}-\frac{t^2u+u^2t}{tu}=\frac{(t+u)^2}{t+u}-(t+u)=0$$

Ý 12

$$\left(1+\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)\left(1-\frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x\geq 0,\ x\neq 1$.

Đặt t = √x ≥ 0, t ≠ 1. Rút gọn từng ngoặc:

$$\left(1+\frac{t(t-1)}{t-1}\right)\left(1-\frac{t(t+1)}{1+t}\right)=(1+t)(1-t)=1-t^2=1-x$$

Ý 13

$$\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}\right)$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x>0,\ y>0,\ x\neq y$.

Đặt t = √x > 0, u = √y > 0, t ≠ u. Dùng hiệu hai bình phương và hiệu hai lập phương:

$$\frac{(t+u)^2}{tu(t+u)}\left(\frac{(t-u)(t+u)}{t-u}-\frac{(t-u)(t^2+tu+u^2)}{(t-u)(t+u)}\right)$$

$$=\frac{t+u}{tu}\left(t+u-\frac{t^2+tu+u^2}{t+u}\right)=\frac{t+u}{tu}\cdot\frac{tu}{t+u}=1$$

Ý 14

$$\left(\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

Rút gọn trên miền xác định của biểu thức.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x\geq 0,\ x\neq 1$.

Đặt t = √x ≥ 0, t ≠ 1. Dùng công thức tổng và hiệu hai lập phương:

$$(1+t+t^2+t)\,(1-t+t^2-t) = (t+1)^2(t-1)^2 = (t^2-1)^2 = (x-1)^2$$

Phần C. Phương trình chứa căn

8 nhóm bài · 72 ý tự luận

Bài 1. Phương trình quy về một căn

Giải các phương trình chứa căn bậc hai sau.

Ý 1

$$\sqrt{3x-2}=10$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}$. Hai vế không âm; bình phương rồi giải:

$$3x-2=100 \iff x=34.$$

Thay $x=34$ vào đề: $\sqrt{100}=10$, đúng.

$$S=\{34\}.$$

Ý 2

$$\sqrt{-2x+5}=3$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \leq \frac{5}{2}$. Bình phương hai vế không âm:

$$-2x+5=9 \iff x=-2.$$

Thay $x=-2$: $\sqrt{9}=3$, đúng.

$$S=\{-2\}.$$

Ý 3

$$\sqrt{4x-7}=11$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq \frac{7}{4}$. Bình phương hai vế:

$$4x-7=121 \iff x=32.$$

Thay $x=32$: $\sqrt{121}=11$, đúng.

$$S=\{32\}.$$

Ý 4

$$\sqrt{2x-3}=\frac{1}{2}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq \frac{3}{2}$. Bình phương hai vế không âm:

$$2x-3=\frac{1}{4}\iff x=\frac{13}{8}.$$

Giá trị tìm được thỏa điều kiện. Thay lại: $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

$$S=\left\{\frac{13}{8}\right\}.$$

Ý 5

$$\sqrt{3-10x}=\frac{2}{5}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x\le\frac{3}{10}$. Bình phương hai vế:

$$3-10x=\frac{4}{25}\iff x=\frac{71}{250}.$$

Giá trị này nhỏ hơn $\frac{3}{10}$; thay lại được $\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}$.

$$S=\left\{\frac{71}{250}\right\}.$$

Ý 6

$$\sqrt{7-3x}=\frac{2}{3}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x\le\frac{7}{3}$. Bình phương hai vế:

$$7-3x=\frac{4}{9}\iff x=\frac{59}{27}.$$

Giá trị này thỏa điều kiện; thay lại được $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$.

$$S=\left\{\frac{59}{27}\right\}.$$

Ý 7

$$\sqrt{4x-20}+\sqrt{9x-45}=5$$

Lời giải.

Điều kiện: $x\ge5$. Đưa các bình phương ra ngoài căn:

$$2\sqrt{x-5}+3\sqrt{x-5}=5\iff\sqrt{x-5}=1\iff x=6.$$

Thay $x=6$: $\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$.

$$S=\{6\}.$$

Ý 8

$$5\sqrt{4x+28}+6\sqrt{x+7}=64$$

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq -7$. Có $\sqrt{4x+28}=2\sqrt{x+7}$, nên:

$$16\sqrt{x+7}=64 \iff \sqrt{x+7}=4 \iff x=9.$$

Thay $x=9$: $5\sqrt{64}+6\sqrt{16}=40+24=64$.

$$S=\{9\}.$$

Ý 9

$$5\sqrt{8-4x}-2\sqrt{32-16x}=10$$

Lời giải.

Điều kiện: $x\leq 2$. Ta có $\sqrt{8-4x}=2\sqrt{2-x}$, $\sqrt{32-16x}=4\sqrt{2-x}$:

$$10\sqrt{2-x}-8\sqrt{2-x}=10 \iff \sqrt{2-x}=5 \iff x=-23.$$

Thay $x=-23$: $5\sqrt{100}-2\sqrt{400}=50-40=10$.

$$S=\{-23\}.$$

Ý 10

$$2\sqrt{4x-12}-\frac{1}{3}\sqrt{9x-27}-9=0$$

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq 3$. Thu gọn các căn đồng dạng:

$$4\sqrt{x-3}-\sqrt{x-3}-9=0 \iff \sqrt{x-3}=3 \iff x=12.$$

Thay $x=12$: $2\sqrt{36}-\frac{1}{3}\sqrt{81}-9=12-3-9=0$.

$$S=\{12\}.$$

Ý 11

$$3\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+8}=4$$

Lời giải.

Điều kiện: mọi $x\in\mathbb{R}$, vì $x^2+2>0$. Thu gọn:

$$2\sqrt{x^2+2}=4 \iff \sqrt{x^2+2}=2 \iff x^2=2.$$

Với $x=\pm\sqrt{2}$, vế trái đề bài bằng $3\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 4=4$.

$$S=\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}.$$

Ý 12

$$2\sqrt{16x-32}+\sqrt{9x-18}=15+\sqrt{4x-8}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq 2$. Đưa các căn về $\sqrt{x-2}$:

$$8\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=15+2\sqrt{x-2}\iff \sqrt{x-2}=\frac{5}{3}\iff x=\frac{43}{9}.$$

Thay $x=\frac{43}{9}$, hai vế đều bằng $\frac{55}{3}$.

$$S=\left\{\frac{43}{9}\right\}.$$

Ý 13

$$\sqrt{4x+20}-\sqrt{x+5}-\frac{1}{3}\sqrt{9x+45}=4$$

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq -5$. Trên miền này, vế trái rút gọn thành:

$$2\sqrt{x+5}-\sqrt{x+5}-\sqrt{x+5}=0.$$

Phương trình trở thành $0=4$, vô lý. Vì vậy không có giá trị nào thỏa đề bài.

$$S=\emptyset.$$

Ý 14

$$\sqrt{4x-8}-4\sqrt{\frac{x-2}{4}}=5$$

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq 2$. Trên miền này:

$$\sqrt{4x-8}-4\sqrt{\frac{x-2}{4}}=2\sqrt{x-2}-4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x-2}=0.$$

Phương trình đòi hỏi $0=5$, vô lý; không có nghiệm.

$$S=\emptyset.$$

Ý 15

$$\sqrt{9x+9}+3\sqrt{4x+4}=22-4\sqrt{\frac{x+1}{4}}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq -1$. Thu gọn các căn:

$$3\sqrt{x+1}+6\sqrt{x+1}=22-2\sqrt{x+1}\iff 11\sqrt{x+1}=22\iff x=3.$$

Thay $x=3$, vế trái bằng $6+12=18$, vế phải bằng $22-4=18$.

$$S=\{3\}.$$

Ý 16

$$4\sqrt{-4x+8}+\frac{2}{5}\sqrt{-25x+50}=\sqrt{144}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \le 2$. Thu gọn:

$$8\sqrt{2-x}+2\sqrt{2-x}=12 \iff \sqrt{2-x}=\frac{6}{5} \iff x=\frac{14}{25}.$$

Giá trị tìm được thỏa điều kiện. Khi thay lại, vế trái bằng $10\cdot\frac{6}{5}=12=\sqrt{144}$.

$$S=\left\{\frac{14}{25}\right\}.$$

Bài 2. Bình phương sau khi xét điều kiện

Giải phương trình bằng cách bình phương hai vế sau khi xét điều kiện.

Ý 1

$$\sqrt{x^2-5x-6}=x-2$$

Lời giải.

Cần $x^2-5x-6\ge 0$ và $x-2\ge 0$. Vì $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$, hai điều kiện kết hợp thành $x\ge 6$.
Trên các điều kiện trên, hai vế không âm nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương.

$$x^2-5x-6=(x-2)^2$$

$$-x-10=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=-10$.
Loại $x=-10$ vì làm vế phải bằng -12 âm, trong khi căn số học không âm.

$$S=\emptyset.$$

Ý 2

$$\sqrt{x^2-2x}=2-x$$

Lời giải.

Cần $x(x-2)\ge 0$ và $2-x\ge 0$. Suy ra $x\le 0$ hoặc $x=2$.
Trên các điều kiện trên, hai vế không âm nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương.

$$x^2-2x=(2-x)^2$$

$$2\,(x-2)=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=2$.
Kiểm tra $x=2$: số dưới căn bằng 0 và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{0}=0.$$

$$S=\{2\}.$$

Ý 3

$$\sqrt{x^2+x}=x$$

Lời giải.

Vế phải phải không âm nên $x \geq 0$. Khi đó $x^2+x=x(x+1) \geq 0$, cả căn và vế phải đều xác định.

Trên các điều kiện trên, hai vế không âm nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương.

$$x^2+x=x^2$$

$$x=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=0$.

Kiểm tra $x=0$: số dưới căn bằng 0 và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{0}=0.$$

$$S=\{0\}.$$

Ý 4

$$\sqrt{1-x^2}=x-1$$

Lời giải.

Cần $1-x^2 \geq 0$, tức $-1 \leq x \leq 1$, đồng thời $x-1 \geq 0$. Hai yêu cầu chỉ cho phép $x=1$.

Trên các điều kiện trên, hai vế không âm nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương.

$$1-x^2=(x-1)^2$$

$$-2x\,(x-1)=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=0, x=1$.

Loại $x=0$ vì làm vế phải bằng -1 âm, trong khi căn số học không âm.

Kiểm tra $x=1$: số dưới căn bằng 0 và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{0}=0.$$

$$S=\{1\}.$$

Ý 5

$$\sqrt{1-2x^2}=x-1$$

Lời giải.

Cần $1-2x^2 \geq 0$ và $x \geq 1$. Hai điều kiện này mâu thuẫn vì $x \geq 1$ làm $1-2x^2 \leq -1 < 0$. Nếu bình phương để xét các ứng viên, vẫn phải loại các giá trị không thỏa điều kiện.

Trên các điều kiện trên, hai vế không âm nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương.

$$1-2x^2=(x-1)^2$$

$$-x\left(3x-2\right)=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=0, x=\frac{2}{3}$.
Loại $x=0$ vì làm vế phải bằng -1 âm, trong khi căn số học không âm.
Loại $x=\frac{2}{3}$ vì làm vế phải bằng $-\frac{1}{3}$ âm, trong khi căn số học không âm.

$$S=\emptyset.$$

Ý 6

$$\sqrt{x^2-2x}=2-x$$

Lời giải.
Cần $x(x-2)\geq 0$ và $2-x\geq 0$. Suy ra $x\leq 0$ hoặc $x=2$.
Trên các điều kiện trên, hai vế không âm nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương.

$$x^2-2x=\left(2-x\right)^2$$

$$2\left(x-2\right)=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=2$.
Kiểm tra $x=2$: số dưới căn bằng 0 và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{0}=0.$$

$$S=\left\{2\right\}.$$

Ý 7

$$\sqrt{x^2-4}-x+2=0$$

Lời giải.
Chuyển vế: $\sqrt{x^2-4}=x-2$. Cần $x^2-4\geq 0$ và $x-2\geq 0$, nên $x\geq 2$.
Trên các điều kiện trên, hai vế không âm nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương.

$$x^2-4=\left(x-2\right)^2$$

$$4\left(x-2\right)=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=2$.
Kiểm tra $x=2$: số dưới căn bằng 0 và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{0}=0.$$

$$S=\left\{2\right\}.$$

Ý 8

$$\sqrt{x^2-4x+1}=x$$

Lời giải.

Cần $x^2-4x+1\geq 0$ và $x\geq 0$. Giữ đồng thời hai điều kiện khi xét nghiệm.

Trên các điều kiện trên, hai vế không âm nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương.

$$x^2-4x+1=x^2$$

$$1-4x=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=\frac{1}{4}$.

Kiểm tra $x=\frac{1}{4}$: số dưới căn bằng $\frac{1}{16}$ và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}.$$

$$S=\left\{\frac{1}{4}\right\}.$$

Ý 9

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+1$$

Lời giải.

Có $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ với mọi x. Vế phải không âm khi $x\geq -1$.

Trên các điều kiện trên, hai vế không âm nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương.

$$x^2+x+1=(x+1)^2$$

$$-x=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=0$.

Kiểm tra $x=0$: số dưới căn bằng 1 và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{1}=1.$$

$$S=\{0\}.$$

Ý 10

$$\sqrt{4x^2-8x+1}=x-1$$

Lời giải.

Cần $4x^2-8x+1\geq 0$ và $x\geq 1$.

Trên các điều kiện trên, hai vế không âm nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương.

$$4x^2-8x+1=(x-1)^2$$

$$3x\,(x-2)=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=0, x=2$.
Loại $x=0$ vì làm vế phải bằng -1 âm, trong khi căn số học không âm.
Kiểm tra $x=2$: số dưới căn bằng 1 và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{1}=1.$$

$$S=\{2\}.$$

Ý 11

$$\sqrt{5x^2-2x+2}=x+1$$

Lời giải.

Có $5x^2-2x+2=5(x-\frac{1}{5})^2+\frac{9}{5}>0$. Vế phải không âm khi $x\geq -1$.
Trên các điều kiện trên, hai vế không âm nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương.

$$5x^2-2x+2=(x+1)^2$$

$$(2x-1)^2=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=\frac{1}{2}$.
Kiểm tra $x=\frac{1}{2}$: số dưới căn bằng $\frac{9}{4}$ và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}.$$

$$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Ý 12

$$\sqrt{4x^2-x+1}-2x=3$$

Lời giải.

Chuyển vế: $\sqrt{4x^2-x+1}=2x+3$. Có $4x^2-x+1=4(x-\frac{1}{8})^2+\frac{15}{16}>0$. Cần thêm $x\geq -\frac{3}{2}$.
Trên các điều kiện trên, hai vế không âm nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương.

$$4x^2-x+1=(2x+3)^2$$

$$-13x-8=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=-\frac{8}{13}$.
Kiểm tra $x=-\frac{8}{13}$: số dưới căn bằng $\frac{529}{169}$ và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{\frac{529}{169}}=\frac{23}{13}.$$

$$S=\left\{-\frac{8}{13}\right\}.$$

Bài 3. Căn bậc hai ở hai vế

Giải phương trình có căn bậc hai ở cả hai vế.

Ý 1

$$\sqrt{3x+1}=\sqrt{4x-3}$$

Lời giải.

Điều kiện: $3x+1\geq 0$, $4x-3\geq 0$, tức $x\geq \frac{3}{4}$.

Hai vế không âm trên miền xác định, nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương:

$$3x+1=4x-3$$

$$4-x=0.$$

Các giá trị cần xét: $x=4$.

Với $x=4$, hai số dưới căn đều không âm. Thay lại phương trình:

$$\sqrt{13}=1\sqrt{13}.$$

$$S=\{4\}.$$

Ý 2

$$\sqrt{x^2-x}=\sqrt{3-x}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x(x-1)\geq 0$ và $x\leq 3$, tức $x\leq 0$ hoặc $1\leq x\leq 3$.

Hai vế không âm trên miền xác định, nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương:

$$x^2-x=3-x$$

$$x^2-3=0.$$

Các giá trị cần xét: $x=-\sqrt{3}, x=\sqrt{3}$.

Với $x=-\sqrt{3}$, hai số dưới căn đều không âm. Thay lại phương trình:

$$\sqrt{\sqrt{3}+3}=1\sqrt{\sqrt{3}+3}.$$

Với $x=\sqrt{3}$, hai số dưới căn đều không âm. Thay lại phương trình:

$$\sqrt{3-\sqrt{3}}=1\sqrt{3-\sqrt{3}}.$$

$$S=\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}.$$

Ý 3

$$\sqrt{x^2-x}=\sqrt{3x-5}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x(x-1)\geq 0$, $x\geq \frac{5}{3}$. Kết hợp được $x\geq \frac{5}{3}$.

Hai vế không âm trên miền xác định, nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương:

$$x^2-x=3x-5$$

$$x^2-4x+5=0.$$

$$(x-2)^2+1=0.$$

Vế trái ít nhất bằng 1, nên không thể bằng 0.

$$S=\emptyset.$$

Ý 4

$$\sqrt{2x^2-3}=\sqrt{4x-3}$$

Lời giải.

Điều kiện: $2x^2-3\geq 0$, $4x-3\geq 0$, tức $x\geq \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Hai vế không âm trên miền xác định, nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương:

$$2x^2-3=4x-3$$

$$2x\left(x-2\right)=0.$$

Các giá trị cần xét: $x=0, x=2$.

Loại $x=0$ vì không thỏa điều kiện xác định của cả hai căn.

Với $x=2$, hai số dưới căn đều không âm. Thay lại phương trình:

$$\sqrt{5}=1\sqrt{5}.$$

$$S=\left\{2\right\}.$$

Ý 5

$$\sqrt{x^2-x-6}=\sqrt{x-3}$$

Lời giải.

Điều kiện: $(x-3)(x+2)\geq 0$ và $x\geq 3$, nên $x\geq 3$.

Hai vế không âm trên miền xác định, nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương:

$$x^2-x-6=x-3$$

$$\left(x-3\right)\left(x+1\right)=0.$$

Các giá trị cần xét: $x=-1, x=3$.
Loại $x=-1$ vì không thỏa điều kiện xác định của cả hai căn.
Với $x=3$, hai số dưới căn đều không âm. Thay lại phương trình:

$$\sqrt{0}=1\sqrt{0}.$$

$$S=\{3\}.$$

Ý 6

$$\sqrt{3x+2}=\sqrt{2x+5}$$

Lời giải.
Điều kiện: $3x+2\geq 0$, $2x+5\geq 0$, tức $x\geq -\frac{2}{3}$.
Hai vế không âm trên miền xác định, nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương:

$$3x+2=2x+5$$

$$x-3=0.$$

Các giá trị cần xét: $x=3$.
Với $x=3$, hai số dưới căn đều không âm. Thay lại phương trình:

$$\sqrt{11}=1\sqrt{11}.$$

$$S=\{3\}.$$

Bài 4. Căn của bình phương

Giải phương trình bằng hằng đẳng thức căn của bình phương.

Ý 1

$$\sqrt{36x^2-12x+1}=5$$

Lời giải.
Biểu thức dưới căn là một bình phương nên xác định với mọi số thực. Dùng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$:

$$\sqrt{(6x-1)^2}=|6x-1|=5.$$

$$6x-1=5 \quad \text{hoặc} \quad 6x-1=-5.$$

Giải hai phương trình bậc nhất được $x=-\frac{2}{3}, x=1$. Khi thay lại, biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối lần lượt bằng -5, 5, nên cả hai nghiệm đều thỏa.

$$S=\left\{-\frac{2}{3},1\right\}.$$

Ý 2

$$\sqrt{16x^2-40x+25}=5$$

Lời giải.

Biểu thức dưới căn là một bình phương nên xác định với mọi số thực. Dùng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$:

$$\sqrt{(4x-5)^2}=|4x-5|=5.$$

$$4x-5=5 \quad \text{hoặc} \quad 4x-5=-5.$$

Giải hai phương trình bậc nhất được $x=0, x=\frac{5}{2}$. Khi thay lại, biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối lần lượt bằng -5, 5, nên cả hai nghiệm đều thỏa.

$$S=\left\{0,\frac{5}{2}\right\}.$$

Ý 3

$$\sqrt{4x^2-4x+1}=3$$

Lời giải.

Biểu thức dưới căn là một bình phương nên xác định với mọi số thực. Dùng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$:

$$\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|=3.$$

$$2x-1=3 \quad \text{hoặc} \quad 2x-1=-3.$$

Giải hai phương trình bậc nhất được $x=-1, x=2$. Khi thay lại, biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối lần lượt bằng -3, 3, nên cả hai nghiệm đều thỏa.

$$S=\{-1,2\}.$$

Ý 4

$$\sqrt{4x^2+12x+9}=3$$

Lời giải.

Biểu thức dưới căn là một bình phương nên xác định với mọi số thực. Dùng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$:

$$\sqrt{(2x+3)^2}=|2x+3|=3.$$

$$2x+3=3 \quad \text{hoặc} \quad 2x+3=-3.$$

Giải hai phương trình bậc nhất được $x=-3, x=0$. Khi thay lại, biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối lần lượt bằng -3, 3, nên cả hai nghiệm đều thỏa.

$$S=\{-3,0\}.$$

Ý 5

$$\sqrt{4x^2-12x+9}-8=0$$

Lời giải.

Biểu thức dưới căn là một bình phương nên xác định với mọi số thực. Dùng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$:

$$\sqrt{(2x-3)^2}=|2x-3|=8.$$

$$2x-3=8 \quad \text{hoặc} \quad 2x-3=-8.$$

Giải hai phương trình bậc nhất được $x=-\frac{5}{2}, x=\frac{11}{2}$. Khi thay lại, biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối lần lượt bằng -8, 8, nên cả hai nghiệm đều thỏa.

$$S=\left\{-\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right\}.$$

Ý 6

$$\sqrt{16-72x+81x^2}-2=0$$

Lời giải.

Biểu thức dưới căn là một bình phương nên xác định với mọi số thực. Dùng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$:

$$\sqrt{(9x-4)^2}=|9x-4|=2.$$

$$9x-4=2 \quad \text{hoặc} \quad 9x-4=-2.$$

Giải hai phương trình bậc nhất được $x=\frac{2}{9}, x=\frac{2}{3}$. Khi thay lại, biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối lần lượt bằng -2, 2, nên cả hai nghiệm đều thỏa.

$$S=\left\{\frac{2}{9};\frac{2}{3}\right\}.$$

Bài 5. Căn của bình phương và biểu thức bậc nhất

Giải phương trình có căn của bình phương và biểu thức bậc nhất.

Ý 1

$$\sqrt{9x^2+12x+4}=4x$$

Lời giải.

Có $\sqrt{9x^2+12x+4}=|3x+2|$, xác định với mọi x. Cần $4x\geq 0$, tức $x\geq 0$.

Biểu thức dưới căn là một bình phương. Điều kiện vế phải không âm giúp phép bình phương giữ nguyên tập nghiệm.

$$(3x+2)^2=16x^2$$

$$-(x-2)(7x+2)=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=-\frac{2}{7}, x=2$.

Loại $x=-\frac{2}{7}$ vì làm vế phải bằng $-\frac{8}{7}$ âm, trong khi căn số học không âm.

Kiểm tra $x=2$: số dưới căn bằng 64 và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{64}=8.$$

$$S=\{2\}.$$

Ý 2

$$\sqrt{4x^2-4x+1}=x-1$$

Lời giải.

Có $\sqrt{4x^2-4x+1}=|2x-1|$. Cần $x-1\geq 0$, tức $x\geq 1$.

Biểu thức dưới căn là một bình phương. Điều kiện vế phải không âm giúp phép bình phương giữ nguyên tập nghiệm.

$$(2x-1)^2=(x-1)^2$$

$$x\,(3x-2)=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=0, x=\frac{2}{3}$.

Loại $x=0$ vì làm vế phải bằng -1 âm, trong khi căn số học không âm.

Loại $x=\frac{2}{3}$ vì làm vế phải bằng $-\frac{1}{3}$ âm, trong khi căn số học không âm.

$$S=\emptyset.$$

Ý 3

$$\sqrt{25x^2-30x+9}=x+7$$

Lời giải.

Có $\sqrt{25x^2-30x+9}=|5x-3|$. Cần $x+7\geq 0$, tức $x\geq -7$.

Biểu thức dưới căn là một bình phương. Điều kiện vế phải không âm giúp phép bình phương giữ nguyên tập nghiệm.

$$(5x-3)^2=(x+7)^2$$

$$4\,(2x-5)\,(3x+2)=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=-\frac{2}{3}, x=\frac{5}{2}$.

Kiểm tra $x=-\frac{2}{3}$: số dưới căn bằng $\frac{361}{9}$ và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{\frac{361}{9}}=\frac{19}{3}.$$

Kiểm tra $x=\frac{5}{2}$: số dưới căn bằng $\frac{361}{4}$ và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{\frac{361}{4}}=\frac{19}{2}.$$

$$S=\left\{-\frac{2}{3},\frac{5}{2}\right\}.$$

Ý 4

$$\sqrt{25x^2-10x+1}=3x-2$$

Lời giải.

Có $\sqrt{25x^2-10x+1}=|5x-1|$. Cần $3x-2\geq 0$, tức $x\geq \frac{2}{3}$.

Biểu thức dưới căn là một bình phương. Điều kiện vế phải không âm giúp phép bình phương giữ nguyên tập nghiệm.

$$(5x-1)^2=(3x-2)^2$$

$$(2x+1)(8x-3)=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=-\frac{1}{2}, x=\frac{3}{8}$.

Loại $x=-\frac{1}{2}$ vì làm vế phải bằng $-\frac{7}{2}$ âm, trong khi căn số học không âm.

Loại $x=\frac{3}{8}$ vì làm vế phải bằng $-\frac{7}{8}$ âm, trong khi căn số học không âm.

$$S=\emptyset.$$

Ý 5

$$\sqrt{x^2+6x+9}+x+2=0$$

Lời giải.

Chuyển vế được $|x+3|=-x-2$. Cần $-x-2\geq 0$, tức $x\leq -2$.

Biểu thức dưới căn là một bình phương. Điều kiện vế phải không âm giúp phép bình phương giữ nguyên tập nghiệm.

$$(x+3)^2=(-x-2)^2$$

$$2x+5=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=-\frac{5}{2}$.

Kiểm tra $x=-\frac{5}{2}$: số dưới căn bằng $\frac{1}{4}$ và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

$$S=\left\{-\frac{5}{2}\right\}.$$

Ý 6

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+3x-2=0$$

Lời giải.

Chuyển vế được $|2x-3|=2-3x$. Cần $2-3x\geq 0$, tức $x\leq \frac{2}{3}$.

Biểu thức dưới căn là một bình phương. Điều kiện vế phải không âm giúp phép bình phương giữ nguyên tập nghiệm.

$$(2x-3)^2=(2-3x)^2$$

$$-5\,(x-1)\,(x+1)=0.$$

Các giá trị cần xét là $x=-1, x=1$.
Loại $x=1$ vì làm vế phải bằng -1 âm, trong khi căn số học không âm.
Kiểm tra $x=-1$: số dưới căn bằng 25 và vế phải không âm; ta được:

$$\sqrt{25}=5.$$

$$S=\{-1\}.$$

Bài 6. Đối chiếu hai căn thức

Giải phương trình bằng cách đối chiếu hai căn thức.

Ý 1

$$\sqrt{x^2-25}-\sqrt{x-5}=0$$

Lời giải.
Chuyển vế được $\sqrt{x^2-25}=\sqrt{x-5}$. Điều kiện chung là $x\geq 5$.
Hai vế không âm trên miền xác định, nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương:

$$x^2-25=x-5$$

$$(x-5)\,(x+4)=0.$$

Các giá trị cần xét: $x=-4, x=5$.
Loại $x=-4$ vì không thỏa điều kiện xác định của cả hai căn.
Với $x=5$, hai số dưới căn đều không âm. Thay lại phương trình:

$$\sqrt{0}=1\sqrt{0}.$$

$$S=\{5\}.$$

Ý 2

$$\sqrt{x-2}-3\sqrt{x^2-4}=0$$

Lời giải.
Chuyển vế được $\sqrt{x-2}=3\sqrt{x^2-4}$. Điều kiện chung là $x\geq 2$.
Hai vế không âm trên miền xác định, nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương:

$$x-2=9x^2-36$$

$$-(x-2)\,(9x+17)=0.$$

Các giá trị cần xét: $x=-\frac{17}{9}, x=2$.
Loại $x=-\frac{17}{9}$ vì không thỏa điều kiện xác định của cả hai căn.
Với $x=2$, hai số dưới căn đều không âm. Thay lại phương trình:

$$\sqrt{0} = 3\sqrt{0}.$$

$$S = \{2\}.$$

Ý 3

$$\sqrt{x^2 - 4} = 2\sqrt{x + 2}$$

Lời giải.

Cần $x^2 - 4 \geq 0$, $x + 2 \geq 0$. Điều kiện chung: $x = -2$ hoặc $x \geq 2$.
Hai vế không âm trên miền xác định, nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương:

$$x^2 - 4 = 4x + 8$$

$$(x - 6)(x + 2) = 0.$$

Các giá trị cần xét: $x = -2, x = 6$.
Với $x = -2$, hai số dưới căn đều không âm. Thay lại phương trình:

$$\sqrt{0} = 2\sqrt{0}.$$

Với $x = 6$, hai số dưới căn đều không âm. Thay lại phương trình:

$$\sqrt{32} = 2\sqrt{8}.$$

$$S = \{-2, 6\}.$$

Ý 4

$$\sqrt{25x^2 - 9} = 2\sqrt{5x - 3}$$

Lời giải.

Điều kiện chung là $x \geq \frac{3}{5}$; khi đó cả $25x^2 - 9$ và $5x - 3$ đều không âm.
Hai vế không âm trên miền xác định, nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương:

$$25x^2 - 9 = 20x - 12$$

$$(5x - 3)(5x - 1) = 0.$$

Các giá trị cần xét: $x = \frac{1}{5}, x = \frac{3}{5}$.
Loại $x = \frac{1}{5}$ vì không thỏa điều kiện xác định của cả hai căn.
Với $x = \frac{3}{5}$, hai số dưới căn đều không âm. Thay lại phương trình:

$$\sqrt{0} = 2\sqrt{0}.$$

$$S = \left\{\frac{3}{5}\right\}.$$

Ý 5

$$\sqrt{x^2+x-20}=\sqrt{x-4}$$

Lời giải.

Có $x^2+x-20=(x+5)(x-4)$. Điều kiện chung của hai căn là $x\geq 4$.

Hai vế không âm trên miền xác định, nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương:

$$x^2+x-20=x-4$$

$$(x-4)\,(x+4)=0.$$

Các giá trị cần xét: $x=-4, x=4$.

Loại $x=-4$ vì không thỏa điều kiện xác định của cả hai căn.

Với $x=4$, hai số dưới căn đều không âm. Thay lại phương trình:

$$\sqrt{0}=1\sqrt{0}.$$

$$S=\{4\}.$$

Ý 6

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x^2+x-6}=0$$

Lời giải.

Chuyển vế được $\sqrt{x-2}=\sqrt{x^2+x-6}$. Vì $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$, điều kiện chung là $x\geq 2$.

Hai vế không âm trên miền xác định, nên bình phương hai vế là phép biến đổi tương đương:

$$x-2=x^2+x-6$$

$$-(x-2)\,(x+2)=0.$$

Các giá trị cần xét: $x=-2, x=2$.

Loại $x=-2$ vì không thỏa điều kiện xác định của cả hai căn.

Với $x=2$, hai số dưới căn đều không âm. Thay lại phương trình:

$$\sqrt{0}=1\sqrt{0}.$$

$$S=\{2\}.$$

Bài 7. Tổng hoặc hiệu nhiều căn thức

Giải các phương trình chứa tổng hoặc hiệu nhiều căn thức.

Ý 1

$$\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 0$. Hai vế không âm; bình phương tương đương:

$$x + 5 = 1 + 2\sqrt{x} + x \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4.$$

Thay $x = 4$: $\sqrt{9} = 1 + \sqrt{4} = 3$.

$$S = \{4\}.$$

Ý 2

$$\sqrt{x} = 2 - \sqrt{3x-2}$$

Lời giải.

Điều kiện của hai căn: $x \geq \frac{2}{3}$. Vì vế trái không âm, còn cần $2 - \sqrt{3x-2} \geq 0$, tức $x \leq 2$. Do đó $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$. Chuyển vế rồi bình phương; trên miền đã nêu, $2 - \sqrt{x} > 0$:

$$\sqrt{3x-2} = 2 - \sqrt{x} \iff 3x - 2 = 4 - 4\sqrt{x} + x \iff x + 2\sqrt{x} - 3 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x} \geq 0$:

$$t^2 + 2t - 3 = (t-1)(t+3) = 0.$$

Nhận $t = 1$, loại $t = -3$, suy ra $x = 1$. Thay vào đề: $1 = 2 - 1$.

$$S = \{1\}.$$

Ý 3

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2$$

Lời giải.

Điều kiện: $1 \leq x \leq 3$. Bình phương hai vế không âm:

$$2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} = 4 \iff \sqrt{(x-1)(3-x)} = 1.$$

Bình phương tiếp hai vế không âm:

$$(x-1)(3-x) = 1 \iff (x-2)^2 = 0 \iff x = 2.$$

Thay $x = 2$: $1 + 1 = 2$, đúng.

$$S = \{2\}.$$

Ý 4

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}=4$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 4$. Chuyển vế: $\sqrt{x+3}=4+\sqrt{x-4}$. Hai vế không âm, nên bình phương:

$$x+3=x+12+8\sqrt{x-4} \iff -9=8\sqrt{x-4}.$$

Vế phải không âm, còn vế trái âm. Phương trình không có nghiệm.

$$S=\emptyset.$$

Ý 5

$$\sqrt{3x-5}=3-\sqrt{x-2}$$

Lời giải.

Điều kiện của hai căn là $x \geq 2$. Vế phải không âm còn cho $x \leq 11$. Đặt $t=\sqrt{x-2}$, khi đó $0 \leq t \leq 3$, $x=t^2+2$.

$$\sqrt{3t^2+1}=3-t \iff 3t^2+1=(3-t)^2 \iff (t-1)(t+4)=0.$$

Nhận $t=1$, loại $t=-4$. Suy ra $x=3$. Thay lại: $\sqrt{4}=3-\sqrt{1}=2$.

$$S=\{3\}.$$

Ý 6

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x-2}$$

Lời giải.

Điều kiện chung: $x \geq 1$. Khi đó $5x-1>x-1$, nên $\sqrt{5x-1}>\sqrt{x-1}$. Do vậy vế trái âm, trong khi vế phải không âm. Không có giá trị nào thỏa phương trình.

$$S=\emptyset.$$

Ý 7

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}=5$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 1$. Đặt $t=\sqrt{x-1} \geq 0$, suy ra $x=t^2+1$. Phương trình trở thành $\sqrt{2t^2+1}=5-t$, nên cần $t \leq 5$.

$$2t^2+1=(5-t)^2 \iff t^2+10t-24=(t-2)(t+12)=0.$$

Nhận $t=2$, loại $t=-12$. Suy ra $x=5$. Thay vào đề: $\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5$.

$$S=\{5\}.$$

Ý 8

$$3-\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+3}$$

Lời giải.

Điều kiện của hai căn: $x\ge\frac{1}{2}$. Vì vế phải không âm, cần $3-\sqrt{2x-1}\ge 0$, tức $x\le 5$. Trên $\frac{1}{2}\le x\le 5$, bình phương hai vế:

$$9-6\sqrt{2x-1}+2x-1=x+3 \iff x+5=6\sqrt{2x-1}.$$

Hai vế đẳng thức cuối không âm; bình phương tiếp:

$$(x+5)^2=36(2x-1) \iff x^2-62x+61=(x-1)(x-61)=0.$$

Nhận $x=1$; loại $x=61$ vì vượt quá 5. Thay $x=1$ vào đề: $3-1=2$.

$$S=\{1\}.$$

Ý 9

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+4}-\sqrt{x^2-x+1}$$

Lời giải.

Ba biểu thức dưới căn đều dương với mọi số thực: $x^2\pm x+1=(x\pm\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$, $2x^2+4>0$. Chuyển căn cuối sang trái rồi bình phương hai vế dương:

$$2x^2+2+2\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=2x^2+4.$$

$$\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=1.$$

Bình phương hai vế không âm và dùng hằng đẳng thức hiệu hai bình phương:

$$(x^2+1)^2-x^2=1 \iff x^4+x^2=x^2(x^2+1)=0.$$

Vì $x^2+1>0$, chỉ có $x=0$. Kiểm tra đề: $1=2-1$, đúng.

$$S=\{0\}.$$

Ý 10

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$$

Lời giải.

Điều kiện chung: $-4\le x\le\frac{1}{2}$. Chuyển vế được $\sqrt{x+4}=\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}$, hai vế đều không âm. Bình phương:

$$x+4=2-3x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)} \iff 2x+1=\sqrt{(1-x)(1-2x)}.$$

Vế phải không âm nên cần $x\ge-\frac{1}{2}$. Trên miền $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$, bình phương tương đương:

$$(2x+1)^2=(1-x)(1-2x) \iff x(2x+7)=0.$$

Các ứng viên là $x=0$ và $x=-\frac{7}{2}$. Loại $-\frac{7}{2}$ vì không thỏa $x\ge-\frac{1}{2}$. Thay $x=0$: $2-1=1$.

$$S=\{0\}.$$

Bài 8. Phương trình căn bậc ba

Giải phương trình có căn bậc ba ở hai vế.

Với các đa thức $A(x), B(x)$, căn bậc ba xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$, kể cả khi số dưới căn âm. Ta dùng $\sqrt[3]{A(x)} = \sqrt[3]{B(x)} \Longleftrightarrow A(x) = B(x)$.

Ví dụ:

$$\sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{5x-8} \iff 2x+1 = 5x-8 \iff x = 3.$$

Thay $x = 3$, hai vế cùng bằng $\sqrt[3]{7}$.

Ý 1

$$\sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{5x-7}$$

Lời giải.

Hai biểu thức dưới căn đều là đa thức, nên phương trình xác định với mọi số thực. Hàm căn bậc ba là đơn ánh; lập phương hai vế được phương trình tương đương:

$$3x - 1 = 5x - 7$$

$$-2\,(x-3) = 0.$$

Kiểm tra $x = 3$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng 8, nên hai căn bậc ba bằng nhau.

$$S = \{3\}\,.$$

Ý 2

$$\sqrt[3]{2x+8} = \sqrt[3]{-1+7x}$$

Lời giải.

Hai biểu thức dưới căn đều là đa thức, nên phương trình xác định với mọi số thực. Hàm căn bậc ba là đơn ánh; lập phương hai vế được phương trình tương đương:

$$2x + 8 = 7x - 1$$

$$9 - 5x = 0.$$

Kiểm tra $x = \frac{9}{5}$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng $\frac{58}{5}$, nên hai căn bậc ba bằng nhau.

$$S = \left\{\frac{9}{5}\right\}.$$

Ý 3

$$\sqrt[3]{6+4x} = \sqrt[3]{-x+18}$$

Lời giải.

Hai biểu thức dưới căn đều là đa thức, nên phương trình xác định với mọi số thực. Hàm căn bậc ba là đơn ánh; lập phương hai vế được phương trình tương đương:

$$4x + 6 = 18 - x$$

$$5x-12=0.$$

Kiểm tra $x=\frac{12}{5}$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng $\frac{78}{5}$, nên hai căn bậc ba bằng nhau.

$$S=\left\{\frac{12}{5}\right\}.$$

Ý 4

$$\sqrt[3]{x^2-4x+3}=\sqrt[3]{x-3}$$

Lời giải.

Hai biểu thức dưới căn đều là đa thức, nên phương trình xác định với mọi số thực. Hàm căn bậc ba là đơn ánh; lập phương hai vế được phương trình tương đương:

$$x^2-4x+3=x-3$$

$$(x-3)(x-2)=0.$$

Kiểm tra $x=2$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng -1, nên hai căn bậc ba bằng nhau.

Kiểm tra $x=3$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng 0, nên hai căn bậc ba bằng nhau.

$$S=\{2,3\}.$$

Ý 5

$$\sqrt[3]{x^2-7x+12}=\sqrt[3]{2x-2}$$

Lời giải.

Hai biểu thức dưới căn đều là đa thức, nên phương trình xác định với mọi số thực. Hàm căn bậc ba là đơn ánh; lập phương hai vế được phương trình tương đương:

$$x^2-7x+12=2x-2$$

$$(x-7)(x-2)=0.$$

Kiểm tra $x=2$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng 2, nên hai căn bậc ba bằng nhau.

Kiểm tra $x=7$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng 12, nên hai căn bậc ba bằng nhau.

$$S=\{2,7\}.$$

Ý 6

$$\sqrt[3]{x-6}=\sqrt[3]{x^2-8x+12}$$

Lời giải.

Hai biểu thức dưới căn đều là đa thức, nên phương trình xác định với mọi số thực. Hàm căn bậc ba là đơn ánh; lập phương hai vế được phương trình tương đương:

$$x-6=x^2-8x+12$$

$$-(x-6)(x-3)=0.$$

Kiểm tra $x=3$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng -3, nên hai căn bậc ba bằng nhau.
Kiểm tra $x=6$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng 0, nên hai căn bậc ba bằng nhau.

$$S=\{3,6\}.$$

Ý 7

$$\sqrt[3]{4x+4}=\sqrt[3]{x^2+5x-14}$$

Lời giải.
Hai biểu thức dưới căn đều là đa thức, nên phương trình xác định với mọi số thực. Hàm căn bậc ba là đơn ánh; lập phương hai vế được phương trình tương đương:

$$4x+4=x^2+5x-14$$

$$-x^2-x+18=0.$$

Hoàn thành bình phương:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{73}{4}.$$

Kiểm tra $x=-\frac{\sqrt{73}}{2}-\frac{1}{2}$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng $2-2\sqrt{73}$, nên hai căn bậc ba bằng nhau.
Kiểm tra $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{73}}{2}$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng $2+2\sqrt{73}$, nên hai căn bậc ba bằng nhau.

$$S=\left\{-\frac{\sqrt{73}}{2}-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{73}}{2}\right\}.$$

Ý 8

$$\sqrt[3]{x^2-5x+6}=\sqrt[3]{x^2-x-6}$$

Lời giải.
Hai biểu thức dưới căn đều là đa thức, nên phương trình xác định với mọi số thực. Hàm căn bậc ba là đơn ánh; lập phương hai vế được phương trình tương đương:

$$x^2-5x+6=x^2-x-6$$

$$-4\,(x-3)=0.$$

Kiểm tra $x=3$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng 0, nên hai căn bậc ba bằng nhau.

$$S=\{3\}.$$

Ý 9

$$\sqrt[3]{x^2+6x+8}=\sqrt[3]{x^2+2x-8}$$

Lời giải.
Hai biểu thức dưới căn đều là đa thức, nên phương trình xác định với mọi số thực. Hàm căn bậc ba là đơn ánh; lập phương hai vế được phương trình tương đương:

$$x^2+6x+8=x^2+2x-8$$

$$4\,(x+4)=0.$$

Kiểm tra $x=-4$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng 0, nên hai căn bậc ba bằng nhau.

$$S=\{-4\}\,.$$

Ý 10

$$\sqrt[3]{2x^2-5x-3}=\sqrt[3]{x^2+7x-18}$$

Lời giải.

Hai biểu thức dưới căn đều là đa thức, nên phương trình xác định với mọi số thực. Hàm căn bậc ba là đơn ánh; lập phương hai vế được phương trình tương đương:

$$2x^2-5x-3=x^2+7x-18$$

$$x^2-12x+15=0.$$

Hoàn thành bình phương:

$$(x-6)^2=21.$$

Kiểm tra $x=6-\sqrt{21}$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng $81-19\sqrt{21}$, nên hai căn bậc ba bằng nhau.
Kiểm tra $x=\sqrt{21}+6$: hai biểu thức dưới căn cùng bằng $81+19\sqrt{21}$, nên hai căn bậc ba bằng nhau.

$$S=\left\{6-\sqrt{21},\sqrt{21}+6\right\}.$$

Nguồn bài tập

Tham khảo Tài liệu học thêm Toán 9 – Thầy Cường Pleiku, các trang 88–89, 99–103 và 122–123. Lời giải do Gia Sư SV biên soạn.