# Hệ thức lượng trong tam giác vuông

## 85 ý tự luận có lời giải

2 mạch kiến thức · 36 nhóm bài tập

| | |
|---|---|
| **A. Tỉ số lượng giác và bài toán hình học** | 60 ý |
| **B. Ứng dụng: chiều cao, khoảng cách và góc** | 25 ý |

### Cách học với tài liệu

Đọc yêu cầu chung của mỗi bài và tự làm từng ý trước khi xem lời giải. Vẽ hình và xác định góc đang xét trước khi chọn cạnh đối, cạnh kề, cạnh huyền. Khi đo chiều cao, lưu ý vị trí mắt và độ cao mặt nền. Giữ số chính xác trong quá trình tính, chỉ làm tròn kết quả cuối.

Bản đề bài và lời giải đầy đủ. Tệp HTML đi kèm cho phép mở từng lời giải, in riêng đề hoặc in riêng lời giải.

# Mục lục

**Phần A. Tỉ số lượng giác và bài toán hình học** **3**
Bài 1. Tỉ số lượng giác từ độ dài các cạnh . . . 3
Bài 2. Tỉ số lượng giác và đường cao trong tam giác vuông . . . 5
Bài 3. Giải tam giác vuông từ cạnh và góc . . . 8
Bài 4. Tính biểu thức bằng góc đặc biệt và góc phụ nhau . . . 9
Bài 5. Rút gọn tổng bình phương tỉ số lượng giác . . . 10
Bài 6. Tìm các tỉ số lượng giác của một góc nhọn . . . 12
Bài 7. Biểu diễn đường cao và hình chiếu bằng tỉ số lượng giác . . . 13
Bài 8. Tính cạnh từ tỉ số lượng giác của góc tạo bởi đường cao . . . 14
Bài 9. Giải tam giác từ tỉ số hai cạnh góc vuông và đường cao . . . 15
Bài 10. Đường cao và các hình chiếu trong tam giác 12–16–20 . . . 15
Bài 11. Phân giác và hình vuông trong tam giác vuông . . . 17
Bài 12. Tam giác đồng dạng từ các hình chiếu của chân đường cao . . . 18
Bài 13. Hệ thức giữa hình chiếu và tỉ số lượng giác . . . 18
Bài 14. Diện tích tam giác và độ dài đường phân giác . . . 19
Bài 15. Đẳng thức lượng giác của hai góc phụ nhau . . . 20

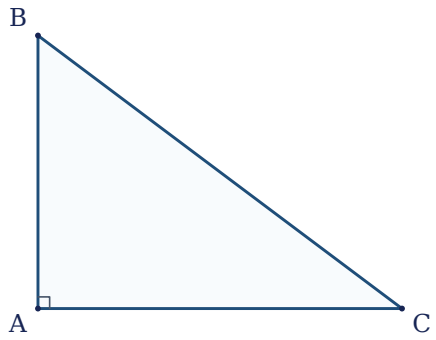
**Phần B. Ứng dụng: chiều cao, khoảng cách và góc** **21**
Bài 1. Chiều cao tháp qua bóng nắng . . . 21
Bài 2. Tàu ngầm lặn xiên . . . 21
Bài 3. Quãng đường thuyền qua sông . . . 22
Bài 4. Góc lệch của thuyền . . . 23
Bài 5. Đo tháp và bề rộng sông . . . 23
Bài 6. Nhìn ngọn cây qua tường . . . 24
Bài 7. Tàu tiến về hải đăng . . . 25
Bài 8. Đường hạ cánh của máy bay . . . 25
Bài 9. Thang tựa vào tường . . . 26
Bài 10. Thang chữ A . . . 27
Bài 11. Đo tòa nhà từ hai vị trí . . . 27
Bài 12. Đèn chiếu từ tòa nhà . . . 28
Bài 13. Tính độ dài trong ba hình . . . 29
Bài 14. Chiều cao cột cờ . . . 30
Bài 15. Bề rộng mái nhà . . . 31
Bài 16. Chiều cao hải đăng . . . 32
Bài 17. Hướng đi của thuyền . . . 32
Bài 18. Khoảng cách giữa hai thuyền . . . 33
Bài 20. Độ dài BC qua góc với phương đứng . . . 33
Bài 21. Chiều cao CE . . . 34
Bài 22. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng . . . 35

# Phần A. Tỉ số lượng giác và bài toán hình học

15 nhóm bài · 60 ý tự luận

## Bài 1. Tỉ số lượng giác từ độ dài các cạnh

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc $B$ và góc $C$ trong mỗi trường hợp sau.




### Ý 1

$AB = 3\,\text{cm},\ AC = 4\,\text{cm}$.

**Lời giải.**

Theo định lí Pythagore:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\text{cm}.$$

Trong tam giác vuông tại $A$, cạnh huyền là $BC$. Theo định nghĩa:

$$\sin B = \frac{AC}{BC},\quad \cos B = \frac{AB}{BC},\quad \tan B = \frac{AC}{AB},\quad \cot B = \frac{AB}{AC}.$$

Hai góc $B, C$ phụ nhau nên $\sin C = \cos B$, $\cos C = \sin B$, $\tan C = \cot B$, $\cot C = \tan B$. Thay độ dài các cạnh, được:

$$\sin B = \frac{4}{5},\quad \cos B = \frac{3}{5},\quad \tan B = \frac{4}{3},\quad \cot B = \frac{3}{4}.$$

$$\sin C = \frac{3}{5},\quad \cos C = \frac{4}{5},\quad \tan C = \frac{3}{4},\quad \cot C = \frac{4}{3}.$$

### Ý 2

$AB = 6\,\text{cm},\ BC = 10\,\text{cm}$.

**Lời giải.**

Theo định lí Pythagore:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,\text{cm}.$$

Trong tam giác vuông tại $A$, cạnh huyền là $BC$. Theo định nghĩa:

$$\sin B = \frac{AC}{BC},\quad \cos B = \frac{AB}{BC},\quad \tan B = \frac{AC}{AB},\quad \cot B = \frac{AB}{AC}.$$

Hai góc $B, C$ phụ nhau nên $\sin C = \cos B$, $\cos C = \sin B$, $\tan C = \cot B$, $\cot C = \tan B$. Thay độ dài các cạnh, được:

$$\sin B = \frac{4}{5}, \quad \cos B = \frac{3}{5}, \quad \tan B = \frac{4}{3}, \quad \cot B = \frac{3}{4}.$$

$$\sin C = \frac{3}{5}, \quad \cos C = \frac{4}{5}, \quad \tan C = \frac{3}{4}, \quad \cot C = \frac{4}{3}.$$

### Ý 3

$AC = 5\,\text{cm},\ BC = 13\,\text{cm}$.

**Lời giải.**

Theo định lí Pythagore:

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\text{cm}.$$

Trong tam giác vuông tại $A$, cạnh huyền là $BC$. Theo định nghĩa:

$$\sin B = \frac{AC}{BC}, \quad \cos B = \frac{AB}{BC}, \quad \tan B = \frac{AC}{AB}, \quad \cot B = \frac{AB}{AC}.$$

Hai góc $B, C$ phụ nhau nên $\sin C = \cos B$, $\cos C = \sin B$, $\tan C = \cot B$, $\cot C = \tan B$. Thay độ dài các cạnh, được:

$$\sin B = \frac{5}{13}, \quad \cos B = \frac{12}{13}, \quad \tan B = \frac{5}{12}, \quad \cot B = \frac{12}{5}.$$

$$\sin C = \frac{12}{13}, \quad \cos C = \frac{5}{13}, \quad \tan C = \frac{12}{5}, \quad \cot C = \frac{5}{12}.$$

### Ý 4

$AB = 5\,\text{cm},\ BC = 1\,\text{dm}$.

**Lời giải.**

Đổi $BC = 1\,\text{dm} = 10\,\text{cm}$. Theo định lí Pythagore:

$$AC = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}\,\text{cm}.$$

Trong tam giác vuông tại $A$, cạnh huyền là $BC$. Theo định nghĩa:

$$\sin B = \frac{AC}{BC}, \quad \cos B = \frac{AB}{BC}, \quad \tan B = \frac{AC}{AB}, \quad \cot B = \frac{AB}{AC}.$$

Hai góc $B, C$ phụ nhau nên $\sin C = \cos B$, $\cos C = \sin B$, $\tan C = \cot B$, $\cot C = \tan B$. Thay độ dài các cạnh, được:

$$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos B = \frac{1}{2}, \quad \tan B = \sqrt{3}, \quad \cot B = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\sin C = \frac{1}{2}, \quad \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan C = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cot C = \sqrt{3}.$$

### Ý 5

$AC = \sqrt{2}\,\text{cm},\ BC = 2\,\text{cm}$.

**Lời giải.**

Theo định lí Pythagore:

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}\,\text{cm}.$$

Trong tam giác vuông tại $A$, cạnh huyền là $BC$. Theo định nghĩa:

$$\sin B=\frac{AC}{BC},\quad \cos B=\frac{AB}{BC},\quad \tan B=\frac{AC}{AB},\quad \cot B=\frac{AB}{AC}.$$

Hai góc $B, C$ phụ nhau nên $\sin C=\cos B$, $\cos C=\sin B$, $\tan C=\cot B$, $\cot C=\tan B$. Thay độ dài các cạnh, được:

$$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos B=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \tan B=1,\quad \cot B=1.$$

$$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos C=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \tan C=1,\quad \cot C=1.$$

### Ý 6

$AB=3\sqrt{3}\,\text{cm},\ AC=3\,\text{cm}.$

**Lời giải.**

Theo định lí Pythagore:

$$BC=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{36}=6\,\text{cm}.$$

Trong tam giác vuông tại $A$, cạnh huyền là $BC$. Theo định nghĩa:

$$\sin B=\frac{AC}{BC},\quad \cos B=\frac{AB}{BC},\quad \tan B=\frac{AC}{AB},\quad \cot B=\frac{AB}{AC}.$$

Hai góc $B, C$ phụ nhau nên $\sin C=\cos B$, $\cos C=\sin B$, $\tan C=\cot B$, $\cot C=\tan B$. Thay độ dài các cạnh, được:

$$\sin B=\frac{1}{2},\quad \cos B=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \tan B=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \cot B=\sqrt{3}.$$

$$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos C=\frac{1}{2},\quad \tan C=\sqrt{3},\quad \cot C=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

## Bài 2. Tỉ số lượng giác và đường cao trong tam giác vuông

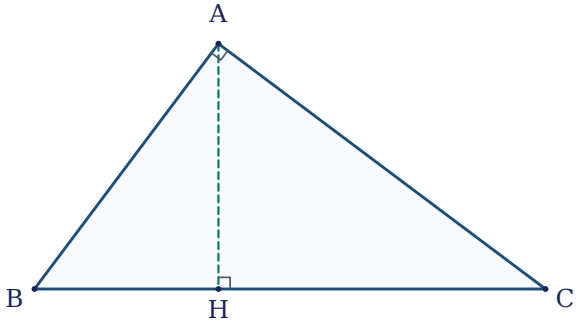
Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có đường cao $AH$ với $H\in BC$. Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc $B$, rồi suy ra các tỉ số lượng giác của góc $C$, trong mỗi trường hợp sau.

Chú ý: nếu sử dụng các hệ thức dưới đây, cần chứng minh bằng tam giác đồng dạng trước khi áp dụng:

$$AB^2=BH\cdot BC,\qquad AC^2=CH\cdot BC;$$

$$AH\cdot BC=AB\cdot AC;\qquad AH^2=BH\cdot CH;$$

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}.$$



### Ý 1

$AB = 30\,\text{cm},\ AH = 24\,\text{cm}.$

**Lời giải.**

Trong tam giác $ABH$ vuông tại $H$, góc $ABH$ chính là góc $B$. Theo định lí Pythagore:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18\,\text{cm}.$$

Suy ra $\sin B = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{4}{5}$, $\cos B = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{3}{5}$, $\tan B = \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{4}{3}$, $\cot B = \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{3}{4}$.Vì $B + C = 90^\circ$, các tỉ số lượng giác của $C$ được suy ra từ các tỉ số của $B$ theo công thức hai góc phụ nhau.

$$\sin B = \frac{4}{5},\quad \cos B = \frac{3}{5},\quad \tan B = \frac{4}{3},\quad \cot B = \frac{3}{4}.$$

$$\sin C = \frac{3}{5},\quad \cos C = \frac{4}{5},\quad \tan C = \frac{3}{4},\quad \cot C = \frac{4}{3}.$$

### Ý 2

$AB = 9\,\text{cm},\ AH = 7{,}2\,\text{cm}.$

**Lời giải.**

Trong tam giác $ABH$ vuông tại $H$:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{9^2 - 7{,}2^2} = 5{,}4\,\text{cm}.$$

Vì $H \in BC$, ta có $\sin B = \dfrac{7{,}2}{9} = \dfrac{4}{5}$, $\cos B = \dfrac{5{,}4}{9} = \dfrac{3}{5}$, $\tan B = \dfrac{7{,}2}{5{,}4} = \dfrac{4}{3}$, $\cot B = \dfrac{5{,}4}{7{,}2} = \dfrac{3}{4}$.Vì $B + C = 90^\circ$, các tỉ số lượng giác của $C$ được suy ra từ các tỉ số của $B$ theo công thức hai góc phụ nhau.

$$\sin B = \frac{4}{5},\quad \cos B = \frac{3}{5},\quad \tan B = \frac{4}{3},\quad \cot B = \frac{3}{4}.$$

$$\sin C = \frac{3}{5},\quad \cos C = \frac{4}{5},\quad \tan C = \frac{3}{4},\quad \cot C = \frac{4}{3}.$$

### Ý 3

$BH = 3{,}6\,\text{cm},\ BC = 10\,\text{cm}.$

**Lời giải.**

Vì $AH \perp BC$, tam giác $ABH$ và tam giác $CBA$ có một góc vuông bằng nhau và góc tại $B$ chung, nên chúng đồng dạng. Do đó $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BH}{AB}$, suy ra $AB^2 = BH \cdot BC$. Thay số:

$$AB = \sqrt{3{,}6 \cdot 10} = 6\,\text{cm}, \qquad AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,\text{cm}.$$

Từ các tỉ số cạnh trong tam giác $ABC$ vuông tại $A$, được $\sin B = \dfrac{4}{5}$, $\cos B = \dfrac{3}{5}$, $\tan B = \dfrac{4}{3}$, $\cot B = \dfrac{3}{4}$.Vì $B + C = 90^\circ$, các tỉ số lượng giác của $C$ được suy ra từ các tỉ số của $B$ theo công thức hai góc phụ nhau.

$$\sin B = \frac{4}{5},\quad \cos B = \frac{3}{5},\quad \tan B = \frac{4}{3},\quad \cot B = \frac{3}{4}.$$

$$\sin C = \frac{3}{5},\quad \cos C = \frac{4}{5},\quad \tan C = \frac{3}{4},\quad \cot C = \frac{4}{3}.$$

### Ý 4

$AH = 6\,\text{cm},\ CH = 2\sqrt{3}\,\text{cm}.$

**Lời giải.**

Trong tam giác $AHC$ vuông tại $H$:

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}.$$

Vì $B + C = 90^\circ$, ta có $\sin B = \cos C = \dfrac{CH}{AC} = \dfrac{1}{2}$ và $\cos B = \sin C = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $\tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot B = \sqrt{3}$.Vì $B + C = 90^\circ$, các tỉ số lượng giác của $C$ được suy ra từ các tỉ số của $B$ theo công thức hai góc phụ nhau.

$$\sin B = \frac{1}{2},\quad \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3},\quad \cot B = \sqrt{3}.$$

$$\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos C = \frac{1}{2},\quad \tan C = \sqrt{3},\quad \cot C = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

### Ý 5

$BH = 25\,\text{cm},\ CH = 9\,\text{cm}.$

**Lời giải.**

Vì $H$ nằm giữa $B, C$, nên $BC = BH + CH = 34\,\text{cm}$. Vì $AH \perp BC$, tam giác $ABH$ và tam giác $CBA$ có một góc vuông bằng nhau và góc tại $B$ chung, nên chúng đồng dạng. Do đó $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BH}{AB}$, suy ra $AB^2 = BH \cdot BC$. Tương tự, tam giác $ACH$ đồng dạng với tam giác $BCA$, nên $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CH}{AC}$ và $AC^2 = CH \cdot BC$. Do đó

$$AB = \sqrt{25 \cdot 34} = 5\sqrt{34}\,\text{cm}, \qquad AC = \sqrt{9 \cdot 34} = 3\sqrt{34}\,\text{cm}.$$

Theo định nghĩa, $\sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3\sqrt{34}}{34}$, $\cos B = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{5\sqrt{34}}{34}$, $\tan B = \dfrac{3}{5}$, $\cot B = \dfrac{5}{3}$. Vì $B + C = 90^\circ$, các tỉ số lượng giác của $C$ được suy ra từ các tỉ số của $B$ theo công thức hai góc phụ nhau.

$$\sin B = \frac{3\sqrt{34}}{34},\quad \cos B = \frac{5\sqrt{34}}{34},\quad \tan B = \frac{3}{5},\quad \cot B = \frac{5}{3}.$$

$$\sin C = \frac{5\sqrt{34}}{34},\quad \cos C = \frac{3\sqrt{34}}{34},\quad \tan C = \frac{5}{3},\quad \cot C = \frac{3}{5}.$$

### Ý 6

$BH = 9\,\text{cm},\ CH = 16\,\text{cm}.$

**Lời giải.**

Vì $H$ nằm giữa $B, C$, nên $BC = BH + CH = 25\,\text{cm}$. Vì $AH \perp BC$, tam giác $ABH$ và tam giác $CBA$ có một góc vuông bằng nhau và góc tại $B$ chung, nên chúng đồng dạng. Do đó $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BH}{AB}$, suy ra $AB^2 = BH \cdot BC$. Tương tự, tam giác $ACH$ đồng dạng với tam giác $BCA$, nên $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CH}{AC}$ và $AC^2 = CH \cdot BC$. Do đó

$$AB = \sqrt{9 \cdot 25} = 15\,\text{cm}, \qquad AC = \sqrt{16 \cdot 25} = 20\,\text{cm}.$$

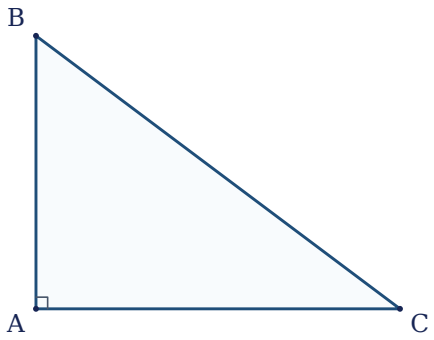
Từ các tỉ số cạnh trong tam giác $ABC$ vuông tại $A$, được $\sin B = \dfrac{4}{5}$, $\cos B = \dfrac{3}{5}$, $\tan B = \dfrac{4}{3}$, $\cot B = \dfrac{3}{4}$. Vì $B + C = 90^\circ$, các tỉ số lượng giác của $C$ được suy ra từ các tỉ số của $B$ theo công thức hai góc phụ nhau.

$$\sin B = \frac{4}{5},\quad \cos B = \frac{3}{5},\quad \tan B = \frac{4}{3},\quad \cot B = \frac{3}{4}.$$

$$\sin C = \frac{3}{5},\quad \cos C = \frac{4}{5},\quad \tan C = \frac{3}{4},\quad \cot C = \frac{4}{3}.$$

## Bài 3. Giải tam giác vuông từ cạnh và góc

Giải tam giác $ABC$ vuông tại $A$ trong mỗi trường hợp sau. Với kết quả không đặc biệt, làm tròn số đo góc và độ dài đến hai chữ số thập phân.




### Ý 1

$AB = 12\,\text{cm},\ \tan B = \dfrac{3}{4}$.

**Lời giải.**

Từ $\tan B = \dfrac{AC}{AB}$, suy ra $AC = 12 \cdot \dfrac{3}{4} = 9\,\text{cm}$. Theo định lí Pythagore, $BC = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15\,\text{cm}$. Dùng máy tính ở chế độ độ với $\tan B = \dfrac{3}{4}$, được $B \approx 36{,}87^\circ$. Vì $B + C = 90^\circ$, nên $C \approx 53{,}13^\circ$.

### Ý 2

$AB = 15\,\text{cm},\ \cos B = \dfrac{5}{13}$.

**Lời giải.**

Từ $\cos B = \dfrac{AB}{BC}$, suy ra $BC = 15 : \dfrac{5}{13} = 39\,\text{cm}$. Theo định lí Pythagore, $AC = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36\,\text{cm}$. Từ $\cos B = \dfrac{5}{13}$, tính được $B \approx 67{,}38^\circ$; do đó $C = 90^\circ - B \approx 22{,}62^\circ$.

### Ý 3

$AB = 2\sqrt{3}\,\text{cm},\ \cot B = \sqrt{3}$.

**Lời giải.**

Từ $\cot B = \dfrac{AB}{AC}$, suy ra $AC = 2\sqrt{3} : \sqrt{3} = 2\,\text{cm}$. Theo định lí Pythagore, $BC = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4\,\text{cm}$. Vì $B$ nhọn và $\cot B = \sqrt{3} = \cot 30^\circ$, nên $B = 30^\circ$ và $C = 60^\circ$.

### Ý 4

$BC = 15\,\text{cm},\ \sin B = \dfrac{3}{5}$.

**Lời giải.**

Từ $\sin B = \dfrac{AC}{BC}$, suy ra $AC = 15 \cdot \dfrac{3}{5} = 9\,\text{cm}$. Theo định lí Pythagore, $AB = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12\,\text{cm}$. Từ $\sin B = \dfrac{3}{5}$, tính được $B \approx 36{,}87^\circ$, rồi $C = 90^\circ - B \approx 53{,}13^\circ$.

### Ý 5

$BC = 41\,\text{cm},\ \cot B = \dfrac{9}{40}$.

**Lời giải.**

Vì $\cot B = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{9}{40}$, đặt $AB = 9t$, $AC = 40t$ với $t > 0$ (đơn vị: cm). Theo định lí Pythagore: $81t^2 + 1600t^2 = 41^2$, tức $1681t^2 = 1681$. Suy ra $t = 1$, nên $AB = 9\,\text{cm}$ và $AC = 40\,\text{cm}$. Từ $\tan B = \dfrac{40}{9}$, tính được $B \approx 77{,}32^\circ$, $C \approx 12{,}68^\circ$.

### Ý 6

$BC = 2\,\text{cm},\ \tan B = \sqrt{3}$.

**Lời giải.**

Vì $B$ nhọn và $\tan B = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$, nên $B = 60^\circ$, $C = 30^\circ$. Khi đó $AB = BC\cos B = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1\,\text{cm}$ và $AC = BC\sin B = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

### Ý 7

$BC = 20\,\text{cm},\ B = 30^\circ$.

**Lời giải.**

Vì $B + C = 90^\circ$, nên $C = 60^\circ$. Theo hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông: $AB = BC\cos B = 20 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,\text{cm}$ và $AC = BC\sin B = 20 \cdot \dfrac{1}{2} = 10\,\text{cm}$.

### Ý 8

$AB = 12\,\text{cm},\ C = 30^\circ$.

**Lời giải.**

Vì $B + C = 90^\circ$, nên $B = 60^\circ$. Từ $\sin C = \dfrac{AB}{BC}$, suy ra $BC = 12 : \dfrac{1}{2} = 24\,\text{cm}$. Khi đó $AC = BC\cos C = 24 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}\,\text{cm}$.

### Ý 9

$AB = 12\,\text{cm},\ BC = 20\,\text{cm}$.

**Lời giải.**

Theo định lí Pythagore, $AC = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16\,\text{cm}$. Từ $\cos B = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{5}$, tính được $B \approx 53{,}13^\circ$. Do đó $C = 90^\circ - B \approx 36{,}87^\circ$.

### Ý 10

$BC = 16\,\text{cm},\ B = 34^\circ$.

**Lời giải.**

Ta có $C = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$. Theo hệ thức giữa cạnh và góc:

$$AB = BC\cos B = 16\cos 34^\circ \approx 13{,}26\,\text{cm},$$

$$AC = BC\sin B = 16\sin 34^\circ \approx 8{,}95\,\text{cm}.$$

Các phép tính được thực hiện ở chế độ độ; chỉ làm tròn ở kết quả cuối.

## Bài 4. Tính biểu thức bằng góc đặc biệt và góc phụ nhau

Tính giá trị của các biểu thức sau:

### Ý 1

$A = \sin 30^\circ - 2\cos 60^\circ + \tan 45^\circ$.

**Lời giải.**

Với $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ và $\tan 45^\circ = 1$, ta có

$$A = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

### Ý 2

$B = \sin 45^\circ + \cot 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$.

**Lời giải.**

Thay các giá trị lượng giác đặc biệt:

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

### Ý 3

$C = \cot 44^\circ \cdot \cot 45^\circ \cdot \cot 46^\circ$.

**Lời giải.**

Vì $44^\circ + 46^\circ = 90^\circ$, nên $\cot 46^\circ = \tan 44^\circ$. Lại có $\cot 45^\circ = 1$ và $\tan 44^\circ \cdot \cot 44^\circ = 1$. Do đó

$$C = \cot 44^\circ \cdot 1 \cdot \tan 44^\circ = 1.$$

### Ý 4

$D = \tan 45^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cot 30^\circ$.

**Lời giải.**

Thay $\tan 45^\circ = 1$, $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$, được

$$D = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}.$$

### Ý 5

$E = \sin 15^\circ + \sin 75^\circ - \cos 15^\circ - \cos 75^\circ + 2\sin 30^\circ$.

**Lời giải.**

Hai góc $15^\circ$ và $75^\circ$ phụ nhau, nên $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$ và $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$. Hai cặp số hạng ấy triệt tiêu. Vì vậy

$$E = 2\sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

### Ý 6

$F = \sin 10^\circ + \sin 40^\circ - \cos 50^\circ - \cos 80^\circ$.

**Lời giải.**

Vì $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$ và $\sin 40^\circ = \cos 50^\circ$, nên

$$F = \cos 80^\circ + \cos 50^\circ - \cos 50^\circ - \cos 80^\circ = 0.$$

## Bài 5. Rút gọn tổng bình phương tỉ số lượng giác

Tính giá trị của các biểu thức sau. Các góc đều tính theo đơn vị độ.

Chú ý: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, nên $\sin^2(90^\circ - \alpha) = \cos^2\alpha$; đồng thời $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

### Ý 1

$A = \sin^2 15^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 75^\circ$.

**Lời giải.**

Vì $\sin 55^\circ = \cos 35^\circ$ và $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$, ta ghép từng cặp:

$$A = (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) + (\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ) = 1 + 1 = 2.$$

### Ý 2

$B = \cos^2 15^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 55^\circ + \cos^2 75^\circ$.

**Lời giải.**

Vì $\cos 55^\circ = \sin 35^\circ$ và $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$, nên

$$B = (\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ) = 2.$$

### Ý 3

$C = \cos^2 81^\circ + \cos^2 9^\circ + \dfrac{2\tan 55^\circ}{\cot 35^\circ}$.

**Lời giải.**

Vì $\cos 81^\circ = \sin 9^\circ$ và $\tan 55^\circ = \cot 35^\circ$, với $\cot 35^\circ \neq 0$, nên

$$C = \sin^2 9^\circ + \cos^2 9^\circ + 2 = 1 + 2 = 3.$$

### Ý 4

$D = \cot 33^\circ + \sin^2 25^\circ - \tan 57^\circ + \sin^2 65^\circ - \dfrac{5\tan 24^\circ}{\cot 66^\circ}$.

**Lời giải.**

Các cặp góc $33^\circ, 57^\circ$; $25^\circ, 65^\circ$; $24^\circ, 66^\circ$ đều phụ nhau. Do đó $\cot 33^\circ = \tan 57^\circ$, $\sin 65^\circ = \cos 25^\circ$ và $\cot 66^\circ = \tan 24^\circ \neq 0$. Suy ra

$$D = 0 + (\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ) - 5 = 1 - 5 = -4.$$

### Ý 5

$E = \sin^2 56^\circ - \cot 27^\circ + \sin^2 34^\circ + \tan 63^\circ - 12\tan 37^\circ \cdot \tan 53^\circ$.

**Lời giải.**

Ta có $\sin 56^\circ = \cos 34^\circ$, $\cot 27^\circ = \tan 63^\circ$ và $\tan 53^\circ = \cot 37^\circ$. Vì $\tan 37^\circ \cdot \cot 37^\circ = 1$, nên

$$E = (\cos^2 34^\circ + \sin^2 34^\circ) + 0 - 12 \cdot 1 = 1 - 12 = -11.$$

### Ý 6

$F = \dfrac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} - 7\sin^2 65^\circ - 7\sin^2 25^\circ - \tan 27^\circ + \tan 45^\circ$.

**Lời giải.**

Vì $\cos 27^\circ \neq 0$, nên $\dfrac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} = \tan 27^\circ$. Lại có $\sin 65^\circ = \cos 25^\circ$ và $\tan 45^\circ = 1$. Vì vậy

$$F = 0 - 7(\cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ) + 1 = -7 + 1 = -6.$$

### Ý 7

$G = 12\tan 32^\circ \cdot \tan 58^\circ + \sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ - \dfrac{8\cot 35^\circ}{\tan 55^\circ}$.

**Lời giải.**

Vì $\tan 58^\circ = \cot 32^\circ$, $\sin 51^\circ = \cos 39^\circ$ và $\tan 55^\circ = \cot 35^\circ \neq 0$, nên

$$G = 12 \cdot 1 + (\cos^2 39^\circ + \sin^2 39^\circ) - 8 = 12 + 1 - 8 = 5.$$

### Ý 8

$K = \dfrac{9\tan 38^\circ}{\cot 52^\circ} + \cos^2 26^\circ + \cos^2 64^\circ + 4\sin^2 85^\circ + 4\sin^2 5^\circ.$

**Lời giải.**

Ta có $\cot 52^\circ = \tan 38^\circ \neq 0$, $\cos 64^\circ = \sin 26^\circ$ và $\sin 85^\circ = \cos 5^\circ$. Do đó

$$K = 9 + (\cos^2 26^\circ + \sin^2 26^\circ) + 4(\cos^2 5^\circ + \sin^2 5^\circ) = 9 + 1 + 4 = 14.$$

## Bài 6. Tìm các tỉ số lượng giác của một góc nhọn

Cho $\alpha$ là góc nhọn, tức $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Thực hiện các yêu cầu sau:

### Ý 1

Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$. Hãy tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

**Lời giải.**

Vì $\alpha$ nhọn nên $\cos\alpha > 0$. Từ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, suy ra

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Theo định nghĩa của tan và cot:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Cũng có thể nhận ra $\sin\alpha = \sin 30^\circ$ với $\alpha$ nhọn, nên $\alpha = 30^\circ$, rồi dùng bảng tỉ số lượng giác của góc đặc biệt.

### Ý 2

Cho $\cos\alpha = \dfrac{5}{4}$. Hãy tính $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

**Lời giải.**

Với góc nhọn $\alpha$, ta luôn có $0 < \cos\alpha < 1$. Nhưng $\dfrac{5}{4} > 1$, nên điều kiện $\cos\alpha = \dfrac{5}{4}$ không thể xảy ra. Vì vậy không tồn tại góc nhọn $\alpha$ thỏa mãn giả thiết, và không có các giá trị tỉ số lượng giác cần tìm.

### Ý 3

Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$. Hãy tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

**Lời giải.**

Vì $\alpha$ nhọn nên $\cos\alpha > 0$. Do đó

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Suy ra

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{3}.$$

### Ý 4

Cho $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$. Hãy tính $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

**Lời giải.**

Vì $\alpha$ nhọn nên $\sin\alpha > 0$. Do đó

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \frac{5}{13}.$$

Suy ra

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{12}, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{12}{5}.$$

### Ý 5

Cho $\tan\alpha = \sqrt{3}$. Hãy tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\cot\alpha$.

**Lời giải.**

Vì $\alpha$ nhọn và $\tan\alpha = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$, nên $\alpha = 60^\circ$. Dùng các giá trị lượng giác của góc $60^\circ$, ta được

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

### Ý 6

Cho $\cot\alpha = 1$. Hãy tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$.

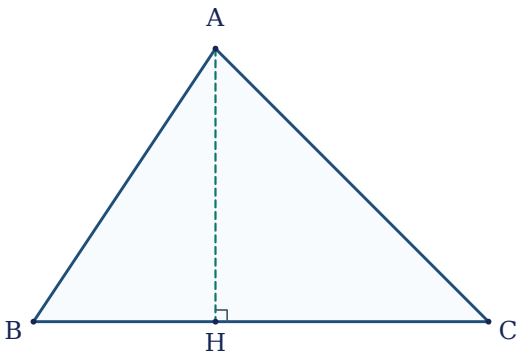
**Lời giải.**

Vì $\alpha$ nhọn và $\cot\alpha = 1 = \cot 45^\circ$, nên $\alpha = 45^\circ$. Do đó

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = 1.$$

## Bài 7. Biểu diễn đường cao và hình chiếu bằng tỉ số lượng giác

Cho tam giác $ABC$ nhọn, có đường cao $AH$ với $H \in BC$. Chứng minh:




### Ý a

$AB\sin B = AC\sin C$.

**Lời giải.**

Vì tam giác $ABC$ nhọn nên $H$ nằm giữa $B$ và $C$. Trong tam giác $ABH$ vuông tại $H$, ta có $\sin B = \dfrac{AH}{AB}$, nên $AB\sin B = AH$. Trong tam giác $ACH$ vuông tại $H$, ta có $\sin C = \dfrac{AH}{AC}$, nên $AC\sin C = AH$. Hai vế cùng bằng $AH$, do đó

$$AB\sin B = AC\sin C.$$

**Ý b**

$BH = AB\cos B$ và $CH = AC\cos C$. Từ đó suy ra $BC = AB\cos B + AC\cos C$.

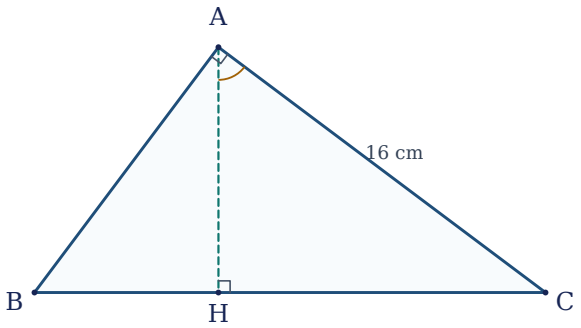
**Lời giải.**

Trong tam giác $ABH$ vuông tại $H$, $\cos B = \dfrac{BH}{AB}$ nên $BH = AB\cos B$. Tương tự, trong tam giác $ACH$ vuông tại $H$, $\cos C = \dfrac{CH}{AC}$ nên $CH = AC\cos C$. Vì $H$ nằm giữa $B, C$, ta có

$$BC = BH + CH = AB\cos B + AC\cos C.$$

## Bài 8. Tính cạnh từ tỉ số lượng giác của góc tạo bởi đường cao

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có đường cao $AH$. Biết $AC = 16\,\text{cm}$ và $\sin\widehat{CAH} = \dfrac{4}{5}$.




**Bài này**

Tính độ dài các cạnh $BC$ và $AB$.

**Lời giải.**

Trong tam giác $AHC$ vuông tại $H$, $\widehat{CAH} + C = 90^\circ$. Mặt khác, trong tam giác $ABC$ vuông tại $A$, $B + C = 90^\circ$. Do đó $\widehat{CAH} = B$ và $\sin B = \dfrac{4}{5}$. Theo định nghĩa, $\sin B = \dfrac{AC}{BC}$, nên

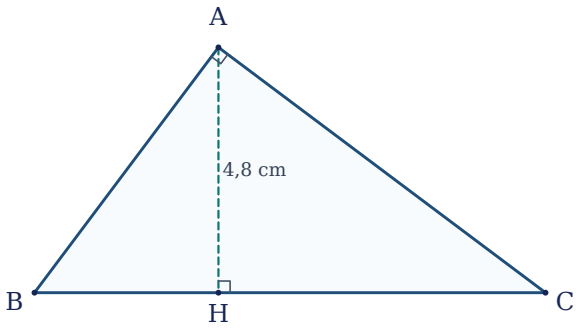
$$BC = \frac{AC}{\sin B} = 16 : \frac{4}{5} = 20\,\text{cm}.$$

Áp dụng định lí Pythagore trong tam giác $ABC$:

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12\,\text{cm}.$$

## Bài 9. Giải tam giác từ tỉ số hai cạnh góc vuông và đường cao

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có đường cao $AH$. Biết $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$ và $AH=4{,}8\,\text{cm}$.




### Ý a

Giải tam giác $ABC$.

**Lời giải.**

Đặt $AB=3t$, $AC=4t$ với $t>0$ (đơn vị: cm). Theo định lí Pythagore, $BC=\sqrt{(3t)^2+(4t)^2}=5t$. Tính diện tích tam giác $ABC$ theo hai cách:

$$\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AH.$$

Suy ra $12t^2=5t\cdot 4{,}8=24t$. Vì $t>0$, chia hai vế cho $12t$ được $t=2$. Vậy $AB=6\,\text{cm}$, $AC=8\,\text{cm}$ và $BC=10\,\text{cm}$. Từ $\tan B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{4}{3}$, tính được $B\approx 53{,}13^\circ$. Do đó $C=90^\circ-B\approx 36{,}87^\circ$.

### Ý b

Tính diện tích tam giác $ABH$.

**Lời giải.**

Từ kết quả câu a, $AB=6\,\text{cm}$. Trong tam giác $ABH$ vuông tại $H$:

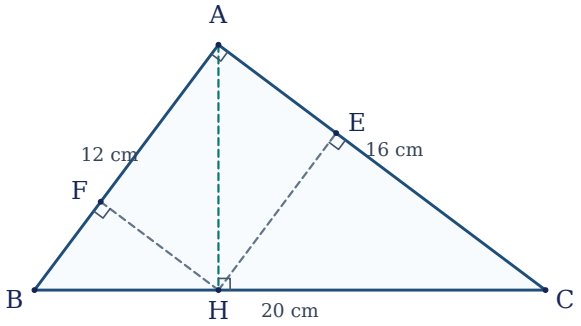
$$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{6^2-4{,}8^2}=3{,}6\,\text{cm}.$$

Do đó

$$S_{ABH}=\frac{1}{2}BH\cdot AH=\frac{1}{2}\cdot 3{,}6\cdot 4{,}8=8{,}64\,\text{cm}^2.$$

## Bài 10. Đường cao và các hình chiếu trong tam giác 12–16–20

Cho tam giác $ABC$ có $AC=16\,\text{cm}$, $AB=12\,\text{cm}$, $BC=20\,\text{cm}$.




### Ý a

Chứng minh tam giác $ABC$ là tam giác vuông.

**Lời giải.**

Ta có $AB^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2 = BC^2$. Theo định lí Pythagore đảo, tam giác $ABC$ vuông tại $A$, vì $BC$ là cạnh đối diện góc $A$.

### Ý b

Kẻ đường cao $AH$. Tính độ dài $AH$.

**Lời giải.**

Tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Tính diện tích theo hai cách:

$$\frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}BC \cdot AH.$$

Vì vậy

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9{,}6\,\text{cm}.$$

### Ý c

Kẻ $HE \perp AC$ với $E \in AC$ và $HF \perp AB$ với $F \in AB$. Tính độ dài $HE$, $HF$.

**Lời giải.**

Vì $AB \perp AC$, $HE \perp AC$ và $HF \perp AB$, nên $HE \parallel AB$, $HF \parallel AC$. Tứ giác $AFHE$ là hình chữ nhật, do đó $HE = AF$. Trong tam giác $ABH$ vuông tại $H$, $\widehat{HAB} = 90^\circ - B = C$. Vì $F \in AB$, nên $\widehat{HAF} = C$. Xét tam giác $AHF$ vuông tại $F$:

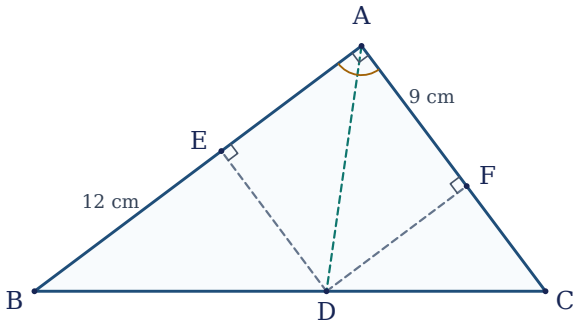
$$HF = AH \sin C = 9{,}6 \cdot \frac{AB}{BC} = 9{,}6 \cdot \frac{12}{20} = 5{,}76\,\text{cm},$$

$$AF = AH \cos C = 9{,}6 \cdot \frac{AC}{BC} = 9{,}6 \cdot \frac{16}{20} = 7{,}68\,\text{cm}.$$

Vậy $HE = AF = 7{,}68\,\text{cm}$ và $HF = 5{,}76\,\text{cm}$.

## Bài 11. Phân giác và hình vuông trong tam giác vuông

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có $AB = 12\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$.




### Ý a

Giải tam giác $ABC$.

**Lời giải.**

Theo định lí Pythagore, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15\,\text{cm}$. Từ $\tan B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{4}$, tính được $B \approx 36{,}87^\circ$. Do đó $C = 90^\circ - B \approx 53{,}13^\circ$.

### Ý b

Kẻ phân giác $AD$ với $D \in BC$. Tính độ dài $BD$, $CD$.

**Lời giải.**

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác, $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{3}$. Lại có $BD + CD = BC = 15\,\text{cm}$. Đặt $BD = 4t$, $CD = 3t$ với $t > 0$, được $7t = 15$ nên $t = \dfrac{15}{7}$. Do đó

$$BD = \frac{60}{7}\,\text{cm}, \qquad CD = \frac{45}{7}\,\text{cm}.$$

### Ý c

Gọi $E, F$ lần lượt là hình chiếu của $D$ trên $AB$ và $AC$. Tứ giác $AEDF$ là hình gì? Vì sao? Tính chu vi và diện tích của nó.

**Lời giải.**

Ta có $DE \perp AB$ và $DF \perp AC$. Vì $AB \perp AC$, nên tứ giác $AEDF$ có ba góc vuông, do đó là hình chữ nhật. Đường $AD$ là phân giác của góc vuông $A$, nên $\widehat{EAD} = 45^\circ$. Tam giác $AED$ vuông tại $E$ có góc $A$ bằng $45^\circ$, nên $AE = ED$. Hình chữ nhật $AEDF$ có hai cạnh kề bằng nhau, vì vậy là hình vuông. Gọi cạnh hình vuông là $x\,\text{cm}$, với $0 < x < 9$. Khi đó $ED = AE = x$ và $BE = 12 - x$. Hai tam giác $BED$ và $BAC$ đồng dạng (cùng góc $B$ và cùng có một góc vuông), nên

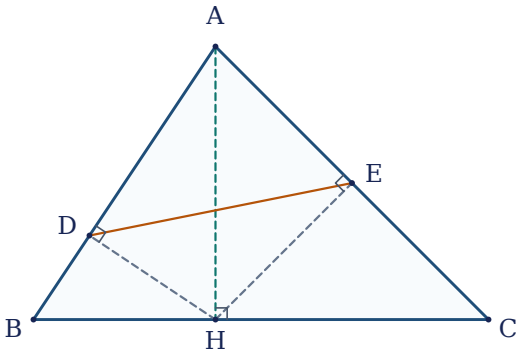
$$\frac{ED}{AC} = \frac{BE}{BA}, \qquad \frac{x}{9} = \frac{12 - x}{12}.$$

Suy ra $12x = 108 - 9x$, tức $21x = 108$, nên $x = \dfrac{36}{7}$. Vậy chu vi và diện tích của hình vuông là

$$P = 4x = \frac{144}{7}\,\text{cm}, \qquad S = x^2 = \frac{1296}{49}\,\text{cm}^2.$$

## Bài 12. Tam giác đồng dạng từ các hình chiếu của chân đường cao

Cho tam giác $ABC$ nhọn, có đường cao $AH$. Gọi $D, E$ lần lượt là hình chiếu của $H$ trên cạnh $AB$ và $AC$. Chứng minh:




### Ý b

Tam giác $ADE$ đồng dạng với tam giác $ACB$ và $\widehat{ADE} = \widehat{AHE}$.

**Lời giải.**

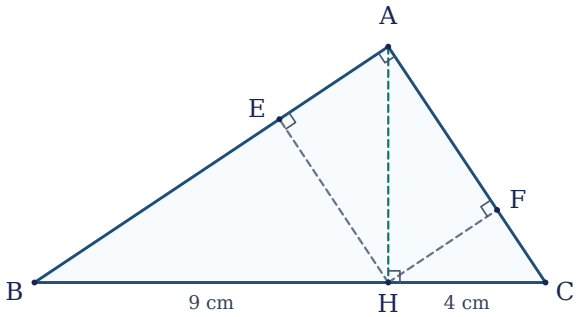
Hai tam giác $ADH$ và $AHB$ có góc $DAH = HAB$ và cùng có một góc vuông, nên chúng đồng dạng. Do đó $\dfrac{AD}{AH} = \dfrac{AH}{AB}$, suy ra $AD \cdot AB = AH^2$. Tương tự, hai tam giác $AEH$ và $AHC$ đồng dạng, nên $\dfrac{AE}{AH} = \dfrac{AH}{AC}$, suy ra $AE \cdot AC = AH^2$. Vì các độ dài đều dương, từ hai đẳng thức trên ta được

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}.$$

Mặt khác, $D \in AB$ và $E \in AC$, nên $\widehat{DAE} = \widehat{CAB}$. Bởi vậy, tam giác $ADE$ đồng dạng với tam giác $ACB$ theo trường hợp cạnh–góc–cạnh. Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$. Trong tam giác $AHE$ vuông tại $E$, $\widehat{AHE} = 90^\circ - \widehat{HAE}$. Vì $E \in AC$, nên $\widehat{HAE} = \widehat{HAC}$. Trong tam giác $AHC$ vuông tại $H$, $\widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{HAC}$. Vì vậy $\widehat{AHE} = \widehat{ACB}$. Kết hợp hai kết quả, được $\widehat{ADE} = \widehat{AHE}$.

## Bài 13. Hệ thức giữa hình chiếu và tỉ số lượng giác

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có đường cao $AH$. Biết $BH = 9\,\text{cm}$, $CH = 4\,\text{cm}$.



### Ý a

Tính độ dài $AH$.

**Lời giải.**

Vì tam giác $ABC$ vuông tại $A$, nên $B+C=90^\circ$. Trong tam giác $AHC$ vuông tại $H$, $\widehat{CAH}=90^\circ-C=B$. Vì vậy, hai tam giác $ABH$ và $CAH$ đồng dạng (cùng có một góc vuông và $\widehat{ABH}=\widehat{CAH}$). Suy ra $\dfrac{AH}{CH}=\dfrac{BH}{AH}$, hay $AH^2=BH\cdot CH$. Vì $AH>0$, ta có

$$AH=\sqrt{9\cdot 4}=6\,\text{cm}.$$

### Ý b

Gọi $E,F$ lần lượt là hình chiếu của $H$ lên cạnh $AB$ và $AC$. Chứng minh $AE\cdot AB=AF\cdot AC$.

**Lời giải.**

Hai tam giác $AEH$ và $AHB$ có góc $EAH=HAB$, cùng có một góc vuông, nên đồng dạng. Suy ra $\dfrac{AE}{AH}=\dfrac{AH}{AB}$, do đó $AE\cdot AB=AH^2$. Tương tự, hai tam giác $AFH$ và $AHC$ đồng dạng, nên $\dfrac{AF}{AH}=\dfrac{AH}{AC}$ và $AF\cdot AC=AH^2$. Vậy

$$AE\cdot AB=AH^2=AF\cdot AC.$$

### Ý c

Chứng minh $BE=BC\cos^3 B$.

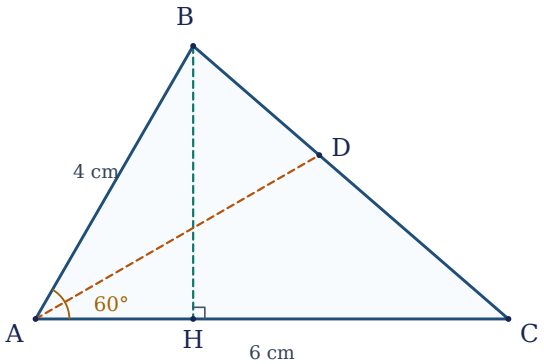
**Lời giải.**

Vì $E\in AB$, $H\in BC$ và $HE\perp AB$, trong tam giác $BEH$ vuông tại $E$ ta có $BE=BH\cos B$. Trong tam giác $ABH$ vuông tại $H$, ta có $BH=AB\cos B$. Trong tam giác $ABC$ vuông tại $A$, ta có $AB=BC\cos B$. Thế liên tiếp ba hệ thức, được

$$BE=BH\cos B=AB\cos^2 B=BC\cos^3 B.$$

## Bài 14. Diện tích tam giác và độ dài đường phân giác

Cho tam giác $ABC$ nhọn, có đường cao $BH$ với $H\in AC$.




### Ý a

Chứng minh công thức tính diện tích $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AB\sin A$.

**Lời giải.**

Vì $H\in AC$, trong tam giác $ABH$ vuông tại $H$ ta có $\sin A=\dfrac{BH}{AB}$, hay $BH=AB\sin A$. Diện tích tam giác $ABC$ với đáy $AC$ và chiều cao $BH$ là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot AB \sin A.$$

**Ý b**

Cho $A = 60^\circ$, $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 6\,\text{cm}$. Kẻ đường phân giác $AD$ với $D \in BC$. Tính độ dài $AD$.

**Lời giải.**

Theo công thức diện tích ở câu a:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}\,\text{cm}^2.$$

Vì $AD$ là phân giác của góc $A = 60^\circ$, nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = 30^\circ$. Tính diện tích hai tam giác $ABD$ và $ACD$ theo hai cạnh kề góc $A$:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD \sin 30^\circ, \qquad S_{ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot AD \sin 30^\circ.$$

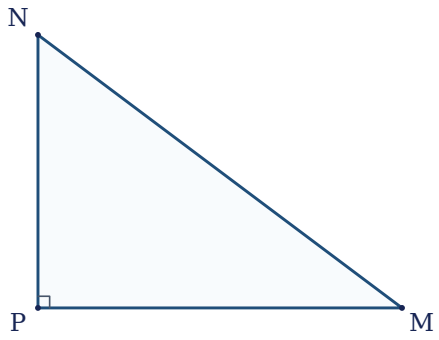
Do $D \in BC$, hai diện tích trên cộng lại bằng $S_{ABC}$. Vì vậy

$$6\sqrt{3} = \frac{1}{2}(4+6)AD \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}AD.$$

Suy ra $AD = \dfrac{12\sqrt{3}}{5}\,\text{cm} \approx 4{,}16\,\text{cm}$.

## Bài 15. Đẳng thức lượng giác của hai góc phụ nhau

Cho tam giác $MNP$ vuông tại $P$.




**Bài này**

Chứng minh $\tan M \cdot \tan N = \cos^2 M + \cos^2 N$.

**Lời giải.**

Vì tam giác $MNP$ vuông tại $P$, nên $M + N = 90^\circ$ và $M, N$ đều là góc nhọn. Do đó $\tan N = \cot M$, suy ra

$$\tan M \cdot \tan N = \tan M \cdot \cot M = 1.$$

Mặt khác, $\cos N = \sin M$, nên

$$\cos^2 M + \cos^2 N = \cos^2 M + \sin^2 M = 1.$$

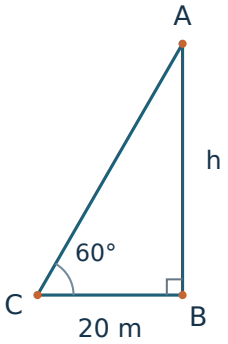
Hai vế đều bằng $1$, vì vậy đẳng thức cần chứng minh là đúng.

# Phần B. Ứng dụng: chiều cao, khoảng cách và góc

21 nhóm bài · 25 ý tự luận

## Bài 1. Chiều cao tháp qua bóng nắng

Vào thời điểm tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc $60^\circ$, bóng của một cái tháp trên mặt đất dài $20$ m. Gọi $A$ là đỉnh tháp, $B$ là chân tháp và $C$ là đầu bóng; $AB \perp BC$, $BC = 20$ m, $\widehat{ACB} = 60^\circ$.




**Bài này**

Tính chiều cao của tháp, làm tròn đến hai chữ số thập phân của mét.

**Lời giải.**

Tam giác $ABC$ vuông tại $B$. Đối với góc $\widehat{ACB}$, chiều cao $AB$ là cạnh đối và bóng $BC$ là cạnh kề, nên

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}.$$

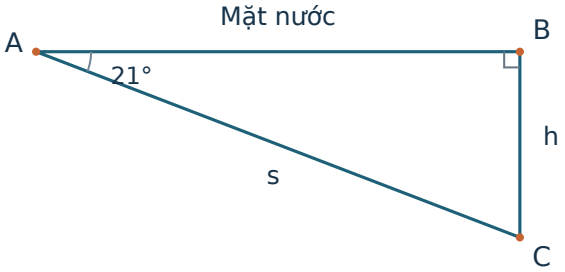
Suy ra

$$AB = BC \tan 60^\circ = 20\sqrt{3} \approx 34{,}641016.$$

Vậy tháp cao khoảng $34{,}64$ m.

## Bài 2. Tàu ngầm lặn xiên

Một tàu ngầm bắt đầu lặn từ mặt nước và đi theo một đường thẳng tạo với mặt nước một góc $21^\circ$. Gọi $A$ là vị trí bắt đầu lặn, $C$ là vị trí của tàu dưới nước và $B$ là hình chiếu vuông góc của $C$ lên mặt nước. Khi đó $AB$ nằm trên mặt nước, $BC$ là độ sâu và $\widehat{BAC} = 21^\circ$.



### Ý a

Sau khi tàu đi được $250$ m theo đường lặn, tàu ở độ sâu bao nhiêu mét? Làm tròn đến hàng đơn vị của mét.

**Lời giải.**

Trong tam giác $ABC$ vuông tại $B$, đường lặn $AC = 250$ m là cạnh huyền, còn độ sâu $BC$ là cạnh đối với góc $21^\circ$. Vì thế

$$\sin 21^\circ = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad BC = 250 \sin 21^\circ \approx 89{,}591987.$$

Làm tròn đến mét, tàu ở độ sâu khoảng $90$ m.

### Ý b

Nếu tốc độ trung bình của tàu là $9$ km/h thì sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu lặn, tàu ở độ sâu $200$ m? Làm tròn đến hàng đơn vị của phút.

**Lời giải.**

Để đạt độ sâu $BC = 200$ m, quãng đường tàu phải đi theo đường lặn là

$$AC = \frac{BC}{\sin 21^\circ} = \frac{200}{\sin 21^\circ} \text{ m}.$$

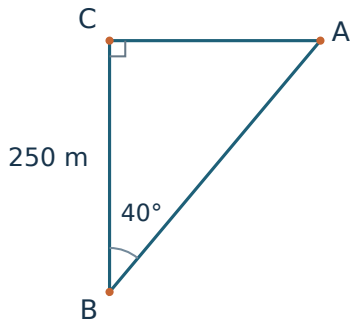
Đổi tốc độ: $9$ km/h $= 9000$ m/h $= 150$ m/phút. Do đó thời gian cần là

$$t = \frac{AC}{150} = \frac{200}{150 \sin 21^\circ} \approx 3{,}720571 \text{ phút}.$$

Làm tròn đến phút, thời gian cần khoảng $4$ phút.

## Bài 3. Quãng đường thuyền qua sông

Một khúc sông rộng $250$ m. Dòng nước làm thuyền đi lệch một góc $40^\circ$ so với phương vuông góc với hai bờ. Gọi $B$ là nơi xuất phát, $C$ là điểm đối diện vuông góc trên bờ bên kia và $A$ là nơi thuyền cập bến; $BC = 250$ m, $AC \perp BC$, $\widehat{CBA} = 40^\circ$.




### Bài này

Tính quãng đường thuyền đi từ bờ này sang bờ kia.

**Lời giải.**

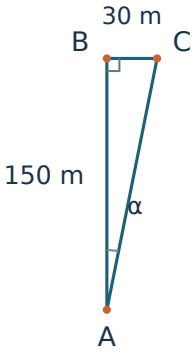
Tam giác $ABC$ vuông tại $C$. Quãng đường cần tìm là cạnh huyền $AB$, còn bề rộng sông $BC$ là cạnh kề với góc $40^\circ$ tại $B$. Vì vậy

$$\cos 40^\circ = \frac{BC}{AB} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{250}{\cos 40^\circ} \approx 326{,}351822.$$

Thuyền đi quãng đường $\frac{250}{\cos 40^\circ}$ m, xấp xỉ $326{,}35$ m.

## Bài 4. Góc lệch của thuyền

Một chiếc thuyền dự định đi từ $A$ đến $B$ theo phương vuông góc với hai bờ sông song song. Dòng nước đẩy thuyền đến $C$ trên bờ bên kia, cách điểm dự định $B$ một đoạn $BC = 30$ m. Bề rộng sông là $AB = 150$ m và $AB \perp BC$.




**Bài này**

Tính góc lệch $\widehat{BAC}$ của thuyền so với phương dự định, làm tròn đến phút.

**Lời giải.**

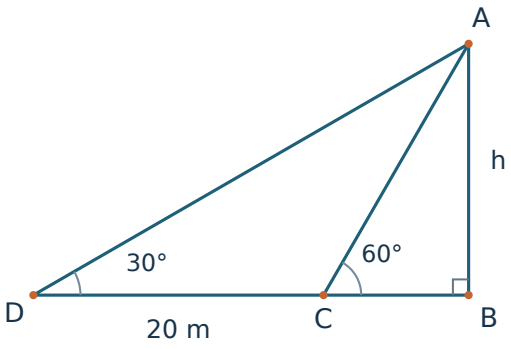
Đặt $\alpha = \widehat{BAC}$. Trong tam giác $ABC$ vuông tại $B$, ta có

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}.$$

Dùng máy tính ở chế độ độ, nhận được $\alpha \approx 11{,}309932^\circ$. Phần thập phân của độ đổi ra phút là $0{,}309932 \cdot 60 \approx 18{,}5959$ phút; làm tròn được $19$ phút. Vậy góc lệch xấp xỉ $11^\circ 19'$.

## Bài 5. Đo tháp và bề rộng sông

Một tháp $AB$ đứng thẳng trên bờ sông, $B$ là chân tháp. Từ điểm $C$ ở bờ đối diện, người ta nhìn đỉnh $A$ dưới góc nâng $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đi tiếp ra xa tháp đến điểm $D$ sao cho $CD = 20$ m thì góc nâng là $\widehat{ADB} = 30^\circ$. Các điểm $D, C, B$ thẳng hàng theo thứ tự ấy và $AB \perp DB$.




**Bài này**

Tính chiều cao $AB$ của tháp và bề rộng $BC$ của sông.

**Lời giải.**

Đặt $BC = x$ m, $AB = h$ m, với $x, h > 0$. Vì $D, C, B$ thẳng hàng theo thứ tự ấy nên $DB = x + 20$ m. Trong hai tam giác vuông $ABC$ và $ABD$,

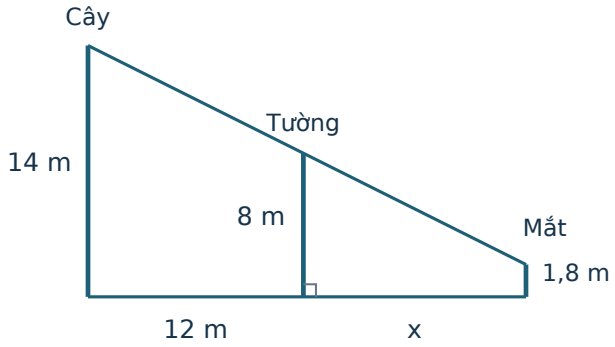
$$h = x\tan 60^\circ = x\sqrt{3},$$

$$h = (x+20)\tan 30^\circ = \frac{x+20}{\sqrt{3}}.$$

Do đó $x\sqrt{3} = \frac{x+20}{\sqrt{3}}$, suy ra $3x = x+20$, nên $x = 10$. Thay vào $h = x\sqrt{3}$, ta được $h = 10\sqrt{3}$ m. Vậy sông rộng $10$ m và tháp cao $10\sqrt{3}$ m, xấp xỉ $17{,}32$ m.

## Bài 6. Nhìn ngọn cây qua tường

Một cây cao $14$ m nằm cách một bức tường cao $8$ m một khoảng ngang $12$ m. Một người cao $1{,}8$ m đứng ở phía bên kia bức tường. Xét mô hình người quan sát có tầm mắt ở độ cao $1{,}8$ m so với mặt đất, các chân cây, tường và người cùng nằm trên một đường thẳng ngang.




### Bài này

Người đó phải đứng cách tường ít nhất bao nhiêu mét để nhìn thấy ngọn cây?

**Lời giải.**

Gọi $x > 0$ m là khoảng cách ngang từ người đến tường. Ở vị trí gần tường nhất mà vẫn nhìn thấy ngọn cây, đường nhìn đi qua đỉnh tường. So với tầm mắt, đỉnh tường cao hơn $8 - 1{,}8 = 6{,}2$ m. Từ đỉnh tường đến ngọn cây, độ cao tăng thêm $14 - 8 = 6$ m trong khoảng ngang $12$ m. Hai tam giác vuông tạo bởi cùng đường nhìn có cùng góc nhọn, nên

$$\frac{6{,}2}{x} = \frac{6}{12}.$$

Suy ra

$$x = \frac{6{,}2 \cdot 12}{6} = 12{,}4 \text{ m}.$$

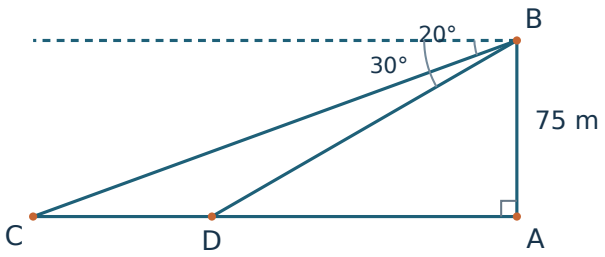
Có thể kiểm tra điều kiện nhìn thấy: tại vị trí bức tường, đường nối mắt với ngọn cây cao

$$1{,}8 + \frac{(14-1{,}8)x}{x+12}.$$

Độ cao này không nhỏ hơn $8$ khi và chỉ khi $6x \ge 74{,}4$, tức $x \ge 12{,}4$. Vậy người đó cần đứng cách tường ít nhất $12{,}4$ m; tại khoảng cách này, đường nhìn vừa đi qua đỉnh tường.

## Bài 7. Tàu tiến về hải đăng

Hải đăng $AB$ cao $75$ m, $A$ là chân hải đăng và $B$ là đỉnh. Một tàu đi thẳng về phía $A$. Từ $B$, góc hạ xuống tàu lần lượt là $20^\circ$ khi tàu ở $C$ và $30^\circ$ khi tàu ở $D$. Các điểm $C, D, A$ nằm trên mặt biển ngang theo thứ tự ấy.




### Bài này

Tính quãng đường $CD$ tàu đi giữa hai lần quan sát, làm tròn đến hàng phần mười của mét.

**Lời giải.**

Đường ngang qua $B$ song song với mặt biển, nên các góc nâng tại tàu bằng các góc hạ tương ứng: $\widehat{BCA} = 20^\circ$, $\widehat{BDA} = 30^\circ$. Từ hai tam giác vuông tại $A$,

$$AC = \frac{AB}{\tan 20^\circ} = \frac{75}{\tan 20^\circ}, \qquad AD = \frac{75}{\tan 30^\circ}.$$

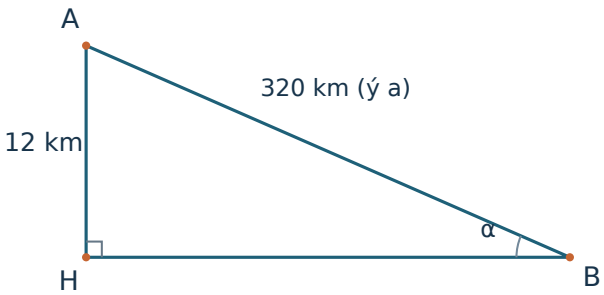
Do $C, D, A$ thẳng hàng theo thứ tự ấy,

$$CD = AC - AD = 75\left(\frac{1}{\tan 20^\circ} - \frac{1}{\tan 30^\circ}\right) \approx 76{,}156996.$$

Vậy tàu đã đi khoảng $76{,}2$ m.

## Bài 8. Đường hạ cánh của máy bay

Một máy bay đang bay ở độ cao $12$ km. Khi hạ cánh, đường đi thẳng của máy bay tạo với mặt đất một góc.




Sơ đồ không theo tỉ lệ

### Ý a

Nếu máy bay bắt đầu hạ cánh khi cách sân bay $320$ km thì góc tạo bởi đường đi của máy bay với mặt đất bằng bao nhiêu? Làm tròn đến phút.

**Lời giải.**

Gọi $A$ là vị trí máy bay bắt đầu hạ cánh, $B$ là sân bay và $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ lên mặt đất. Khi đó $AH = 12$ km và $AB$ là khoảng cách từ máy bay đến sân bay. Trong tam giác $AHB$ vuông tại $H$, đặt $\alpha = \widehat{ABH}$. Khoảng cách từ máy bay đến sân bay là cạnh huyền $AB = 320$ km, còn độ cao $AH = 12$ km. Vì vậy

$$\sin\alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{12}{320} = 0{,}0375.$$

Dùng máy tính ở chế độ độ được $\alpha \approx 2{,}149096^\circ$. Đổi phần thập phân ra phút: $0{,}149096 \cdot 60 \approx 8{,}9458$ phút, làm tròn được $9$ phút. Góc hạ cánh cần tìm xấp xỉ $2^\circ 9'$.

### Ý b

Nếu đường đi khi hạ cánh tạo với mặt đất góc $5^\circ$ thì máy bay phải bắt đầu hạ cánh khi cách sân bay bao nhiêu ki-lô-mét? Làm tròn đến một chữ số thập phân.

**Lời giải.**

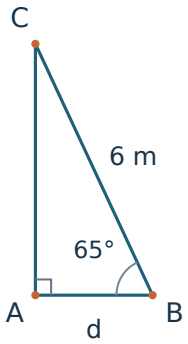
Gọi $A$ là vị trí bắt đầu hạ cánh, $B$ là sân bay và $H$ là hình chiếu của $A$ lên mặt đất. Khoảng cách cần tìm là $AB$, còn độ cao là $AH = 12$ km. Xét tam giác $AHB$ vuông tại $H$, với $AH = 12$ km và $\widehat{ABH} = 5^\circ$. Ta có

$$\sin 5^\circ = \frac{AH}{AB} \quad\Rightarrow\quad AB = \frac{12}{\sin 5^\circ} \approx 137{,}684559 \text{ km}.$$

Làm tròn đến một chữ số thập phân, máy bay cần bắt đầu hạ cánh khi cách sân bay khoảng $137{,}7$ km.

## Bài 9. Thang tựa vào tường

Một chiếc thang dài $6$ m tựa vào một bức tường thẳng đứng. Để đặt thang theo góc an toàn đã cho, góc giữa thang và mặt đất ngang phải bằng $65^\circ$.




### Bài này

Tính khoảng cách từ chân thang đến chân tường.

**Lời giải.**

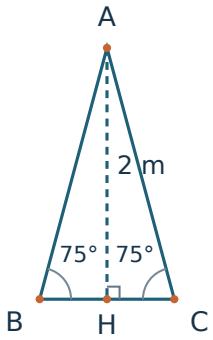
Gọi $A$ là chân tường, $B$ là chân thang và $C$ là đầu thang trên tường. Khi đó $AC \perp AB$, $BC = 6$ m và $\widehat{ABC} = 65^\circ$. Trong tam giác vuông $ABC$, khoảng cách cần tìm $AB$ là cạnh kề với góc $65^\circ$ và $BC$ là cạnh huyền. Vì vậy

$$AB = BC\cos 65^\circ = 6\cos 65^\circ \approx 2{,}535710 \text{ m}.$$

Chân thang cách tường $6\cos 65^\circ$ m, xấp xỉ $2{,}54$ m.

## Bài 10. Thang chữ A

Một chiếc thang chữ A được mô hình hóa bằng tam giác $ABC$ cân tại $A$, với hai chân $B, C$ trên mặt đất ngang. Mỗi cạnh thang tạo với mặt đất góc $75^\circ$. Độ cao thẳng đứng từ đỉnh $A$ xuống mặt đất là $AH = 2$ m, với $H \in BC$ và $AH \perp BC$.




### Bài này

Tính độ dài mỗi cạnh thang $AB$ và $AC$.

**Lời giải.**

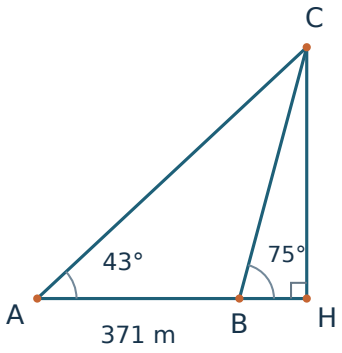
Tam giác $ABC$ cân tại $A$ nên hai cạnh thang có độ dài bằng nhau. Xét tam giác $ABH$ vuông tại $H$, có $\widehat{ABH} = 75^\circ$ và $AH = 2$ m.

$$\sin 75^\circ = \frac{AH}{AB} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{2}{\sin 75^\circ} \approx 2{,}070552 \text{ m}.$$

Do đó $AB = AC = \frac{2}{\sin 75^\circ}$ m, mỗi cạnh dài xấp xỉ $2{,}07$ m.

## Bài 11. Đo tòa nhà từ hai vị trí

Để đo chiều cao $CH$ của một tòa nhà ở phía bên kia sông, người ta chọn hai điểm $A, B$ trên mặt đất ngang, với $A, B, H$ thẳng hàng theo thứ tự ấy, $AB = 371$ m và $CH \perp AH$. Các góc nâng lên đỉnh $C$ là $\widehat{HAC} = 43^\circ$ và $\widehat{HBC} = 75^\circ$.



**Bài này**

Tính chiều cao $CH$ của tòa nhà, làm tròn đến mét.

**Lời giải.**

Đặt $BH = x$ m và $CH = h$ m, với $x, h > 0$. Khi đó $AH = x + 371$ m. Trong hai tam giác vuông $BHC$ và $AHC$,

$$h = x\tan 75^\circ = (x + 371)\tan 43^\circ.$$

Suy ra

$$x(\tan 75^\circ - \tan 43^\circ) = 371\tan 43^\circ,$$

$$x = \frac{371\tan 43^\circ}{\tan 75^\circ - \tan 43^\circ}.$$

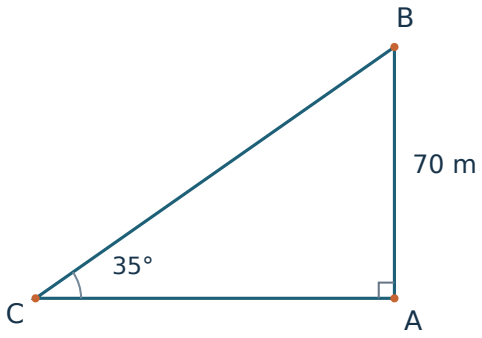
Vì thế

$$CH = h = \frac{371\tan 43^\circ \tan 75^\circ}{\tan 75^\circ - \tan 43^\circ} \approx 461{,}202136 \text{ m}.$$

Làm tròn đến mét, tòa nhà cao khoảng $461$ m.

## Bài 12. Đèn chiếu từ tòa nhà

Một tòa nhà $AB$ cao $70$ m, $A$ là chân nhà và $B$ là đỉnh. Một đèn ở $B$ chiếu tới ô tô tại điểm $C$ trên mặt đất ngang. Tia sáng tạo với phương ngang góc $35^\circ$; do các phương ngang song song, $\widehat{BCA} = 35^\circ$.




**Bài này**

Tính khoảng cách $AC$ từ ô tô đến chân tòa nhà, làm tròn đến hàng phần trăm của mét.

**Lời giải.**

Tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Với góc $35^\circ$ tại $C$, cạnh đối là chiều cao $AB = 70$ m và cạnh kề là khoảng cách $AC$.

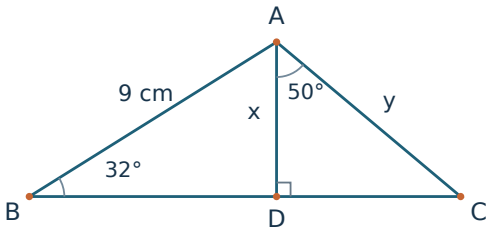
$$\tan 35^\circ = \frac{AB}{AC} \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{70}{\tan 35^\circ} \approx 99{,}970360 \text{ m}.$$

Vậy ô tô cách chân tòa nhà khoảng $99{,}97$ m.

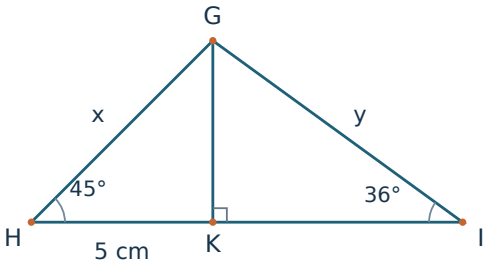
## Bài 13. Tính độ dài trong ba hình

Tính các độ dài $x, y$ trong từng hình dưới đây. Các độ dài đều tính bằng xăng-ti-mét; làm tròn kết quả đến hàng phần mười của xăng-ti-mét.

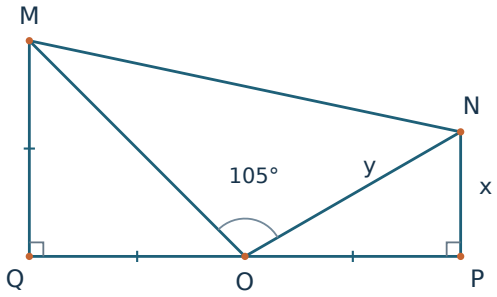
Hình 1




Hình 2




Hình 3




### Ý 1

Trong tam giác $ABC$, điểm $D$ thuộc $BC$, $AD \perp BC$, $AB = 9$ cm, $\widehat{ABD} = 32^\circ$ và $\widehat{DAC} = 50^\circ$. Tìm $x = AD$ và $y = AC$.

**Lời giải.**

Trong tam giác $ABD$ vuông tại $D$,

$$x = AD = AB \sin 32^\circ = 9 \sin 32^\circ \approx 4{,}769273 \text{ cm}.$$

Trong tam giác $ADC$ vuông tại $D$, đối với góc $\widehat{DAC} = 50^\circ$, cạnh $AD$ là cạnh kề, còn $AC$ là cạnh huyền. Do đó

$$\cos 50^\circ = \frac{AD}{AC} \quad \Rightarrow \quad y = AC$$
$$= \frac{9 \sin 32^\circ}{\cos 50^\circ} \approx 7{,}419672 \text{ cm}.$$

Làm tròn ở bước cuối: $x \approx 4{,}8$ cm, $y \approx 7{,}4$ cm.

### Ý 2

Trong tam giác $HGI$, điểm $K$ thuộc $HI$, $GK \perp HI$, $HK = 5$ cm, $\widehat{GHK} = 45^\circ$ và $\widehat{GIK} = 36^\circ$. Tìm $x = GH$ và $y = GI$.

**Lời giải.**

Trong tam giác $HGK$ vuông tại $K$,

$$GK = HK \tan 45^\circ = 5 \text{ cm},$$

$$x = GH = \frac{HK}{\cos 45^\circ} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}071068 \text{ cm}.$$

Trong tam giác $GKI$ vuông tại $K$,

$$\sin 36^\circ = \frac{GK}{GI} \quad \Rightarrow \quad y = GI = \frac{5}{\sin 36^\circ} \approx 8{,}506508 \text{ cm}.$$

Vậy $x \approx 7{,}1$ cm và $y \approx 8{,}5$ cm.

### Ý 3

Các điểm $Q, O, P$ thẳng hàng theo thứ tự ấy; $QM \perp QP$, $PN \perp QP$ và $M, N$ nằm cùng phía đối với $QP$. Biết $QM = QO = OP$, $MO = 2\sqrt{2}$ cm và $\widehat{MON} = 105^\circ$. Tìm $x = NP$ và $y = ON$.

**Lời giải.**

Vì $QM = QO$ và $QM \perp QO$, tam giác $MQO$ vuông cân tại $Q$. Do đó $\widehat{MOQ} = 45^\circ$ và

$$QM = QO = \frac{MO}{\sqrt{2}} = 2 \text{ cm}.$$

Theo giả thiết, $OP = QO = 2$ cm. Trong nửa mặt phẳng bờ $QP$ chứa $M, N$, ba góc $\widehat{MOQ}$, $\widehat{MON}$ và $\widehat{NOP}$ kề nhau và có tổng bằng $180^\circ$. Vì vậy

$$\widehat{NOP} = 180^\circ - \widehat{MOQ} - \widehat{MON} = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ.$$

Xét tam giác $NOP$ vuông tại $P$:

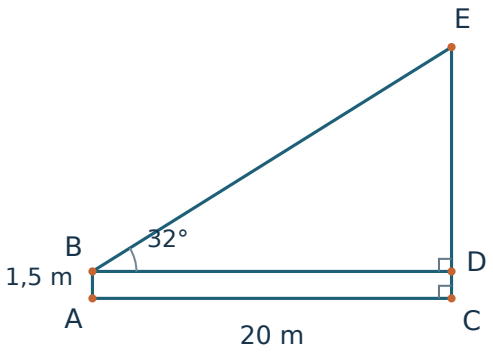
$$x = NP = OP \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}154701 \text{ cm},$$

$$y = ON = \frac{OP}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}309401 \text{ cm}.$$

Vậy $x \approx 1{,}2$ cm, $y \approx 2{,}3$ cm.

## Bài 14. Chiều cao cột cờ

Một người đứng tại $A$, cách chân cột cờ $C$ một đoạn $AC = 20$ m. Mắt người ở vị trí $B$, cao hơn mặt đất $AB = 1{,}5$ m. Cột cờ $CE$ thẳng đứng. Đường ngang $BD$ qua mắt gặp cột cờ tại $D$; góc nâng lên đỉnh cột cờ là $\widehat{EBD} = 32^\circ$.



**Bài này**

Tính chiều cao $CE$ của cột cờ, làm tròn đến mét.

**Lời giải.**

Tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật nên $BD = AC = 20$ m và $CD = AB = 1{,}5$ m. Tam giác $BDE$ vuông tại $D$, do đó

$$DE = BD\tan 32^\circ = 20\tan 32^\circ.$$

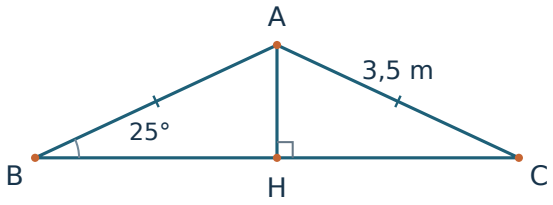
Chiều cao cột cờ bằng

$$CE = CD + DE = 1{,}5 + 20\tan 32^\circ \approx 13{,}997387 \text{ m}.$$

Làm tròn đến mét, cột cờ cao khoảng $14$ m.

## Bài 15. Bề rộng mái nhà

Mặt cắt đứng phần mái của một ngôi nhà là tam giác $ABC$ cân tại $A$. Mỗi cạnh mái dài $3{,}5$ m, tức $AB = AC = 3{,}5$ m. Góc giữa mái và phương ngang là $\widehat{ABC} = 25^\circ$.




**Bài này**

Tính độ dài $BC$, làm tròn đến hàng phần mười của mét.

**Lời giải.**

Kẻ $AH \perp BC$ với $H \in BC$. Vì tam giác $ABC$ cân tại $A$, đường cao $AH$ đồng thời là đường trung tuyến, nên $BH = HC$. Trong tam giác $ABH$ vuông tại $H$,

$$BH = AB\cos 25^\circ = 3{,}5\cos 25^\circ.$$

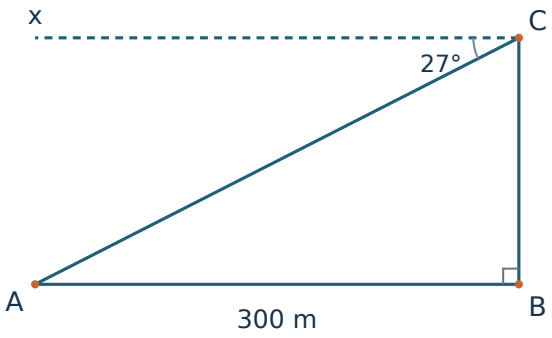
Do đó

$$BC = 2BH = 7\cos 25^\circ \approx 6{,}344155 \text{ m}.$$

Làm tròn đến hàng phần mười, $BC \approx 6{,}3$ m.

## Bài 16. Chiều cao hải đăng

Trên mặt biển ngang, ca nô ở $A$, cách chân hải đăng $B$ một đoạn $AB = 300$ m. Người quan sát trên tháp đặt mắt tại $C$. Tia nhìn $CA$ tạo với tia nằm ngang $Cx$ góc $\widehat{ACx} = 27^\circ$, với $AB \parallel Cx$ và $BC \perp AB$.




### Bài này

Tính chiều cao $BC$ của tháp theo mô hình đã cho.

**Lời giải.**

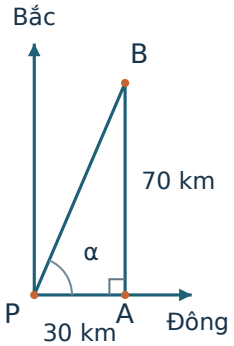
Do $AB \parallel Cx$, góc nâng tại $A$ bằng góc hạ tại $C$, nên $\widehat{CAB} = 27^\circ$. Tam giác $ABC$ vuông tại $B$, vì vậy

$$\tan 27^\circ = \frac{BC}{AB} \quad \Rightarrow \quad BC = 300 \tan 27^\circ \approx 152{,}857635 \text{ m}.$$

Chiều cao cần tìm là $300 \tan 27^\circ$ m, xấp xỉ $152{,}86$ m.

## Bài 17. Hướng đi của thuyền

Một chiếc thuyền đi từ $P$ theo hướng Đông với tốc độ $20$ km/h trong $1$ giờ $30$ phút đến $A$. Sau đó thuyền đi theo hướng Bắc với cùng tốc độ trong $3$ giờ $30$ phút đến $B$.




### Bài này

Tính góc giữa hướng Đông và hướng từ $P$ đến $B$, tức $\widehat{APB}$. Làm tròn đến phút.

**Lời giải.**

Đổi thời gian: $1$ giờ $30$ phút $= 1{,}5$ giờ và $3$ giờ $30$ phút $= 3{,}5$ giờ. Quãng đường theo hướng Đông và hướng Bắc lần lượt là

$$PA = 20 \cdot 1{,}5 = 30 \text{ km}, \qquad AB = 20 \cdot 3{,}5 = 70 \text{ km}.$$

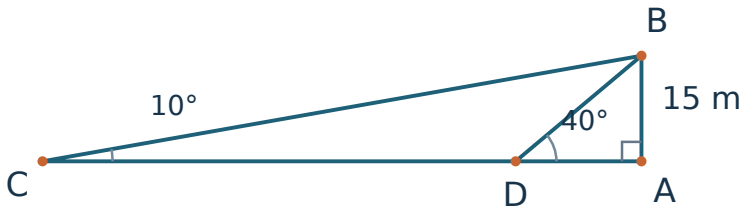
Hai hướng Đông và Bắc vuông góc, nên tam giác $PAB$ vuông tại $A$. Đặt $\alpha = \widehat{APB}$; khi đó

$$\tan\alpha = \frac{AB}{PA} = \frac{70}{30} = \frac{7}{3}.$$

Dùng máy tính ở chế độ độ, $\alpha \approx 66{,}801409^\circ$. Phần thập phân đổi ra phút là $0{,}801409 \cdot 60 \approx 48{,}0846$ phút, làm tròn được $48$ phút. Vậy hướng từ $P$ đến $B$ tạo với hướng Đông góc khoảng $66^\circ 48'$ về phía Bắc.

## Bài 18. Khoảng cách giữa hai thuyền

Từ đài quan sát có đỉnh $B$ cao $15$ m so với mặt biển và chân $A$, một người nhìn thấy hai chiếc thuyền ở $C$ và $D$ dưới các góc hạ lần lượt $10^\circ$ và $40^\circ$. Hai thuyền ở cùng một phía đối với chân đài, với $C, D, A$ thẳng hàng theo thứ tự ấy. Mặt biển được coi là ngang.




**Bài này**

Tính khoảng cách $CD$ giữa hai thuyền, làm tròn đến mét.

**Lời giải.**

Các góc nâng tại hai thuyền bằng các góc hạ tương ứng, nên $\widehat{BCA} = 10^\circ$ và $\widehat{BDA} = 40^\circ$. Từ hai tam giác vuông tại $A$,

$$AC = \frac{15}{\tan 10^\circ}, \qquad AD = \frac{15}{\tan 40^\circ}.$$

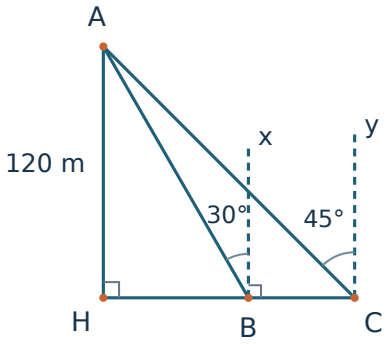
Vì $C, D, A$ thẳng hàng theo thứ tự ấy,

$$CD = AC - AD = 15\left(\frac{1}{\tan 10^\circ} - \frac{1}{\tan 40^\circ}\right) \approx 67{,}192923 \text{ m}.$$

Làm tròn đến mét, hai thuyền cách nhau khoảng $67$ m.

## Bài 20. Độ dài BC qua góc với phương đứng

Các điểm $H, B, C$ thẳng hàng theo thứ tự ấy trên một đường ngang. Điểm $A$ ở phía trên $H$ với $AH \perp HC$ và $AH = 120$ m. Từ $B, C$ kẻ các tia thẳng đứng hướng lên là $Bx, Cy$. Biết góc giữa $BA$ và $Bx$ bằng $30^\circ$, góc giữa $CA$ và $Cy$ bằng $45^\circ$.




**Bài này**

Tính chiều dài $BC$.

**Lời giải.**

Vì các tia $Bx, Cy$ vuông góc với đường ngang $HC$, nên

$$\widehat{ABH} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\widehat{ACH} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Xét các tam giác vuông $AHB$ và $AHC$:

$$HB = \frac{AH}{\tan 60^\circ} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}\ \text{m},$$

$$HC = \frac{AH}{\tan 45^\circ} = 120\ \text{m}.$$

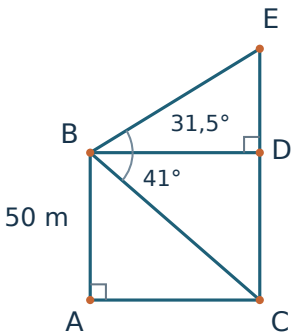
Vì $H, B, C$ thẳng hàng theo thứ tự ấy,

$$BC = HC - HB = 120 - 40\sqrt{3} \approx 50{,}717968\ \text{m}.$$

Vậy $BC = 120 - 40\sqrt{3}$ m, xấp xỉ $50{,}72$ m.

## Bài 21. Chiều cao CE

Tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật với $AB = 50$ m; $A, C$ ở trên mặt đất ngang, $B, D$ nằm phía trên tương ứng. Điểm $E$ nằm trên tia $CD$, ở phía trên $D$. Biết $\widehat{EBD} = 31{,}5^\circ$ và $\widehat{DBC} = 41^\circ$.



**Bài này**

Tính chiều dài $CE$.

**Lời giải.**

Vì $ABDC$ là hình chữ nhật, $CD = AB = 50$ m và $BD \perp CE$. Trong tam giác $BDC$ vuông tại $D$,

$$\tan 41^\circ = \frac{CD}{BD} \quad \Rightarrow \quad BD = \frac{50}{\tan 41^\circ}.$$

Trong tam giác $BDE$ vuông tại $D$,

$$DE = BD \tan 31{,}5^\circ = \frac{50 \tan 31{,}5^\circ}{\tan 41^\circ}.$$

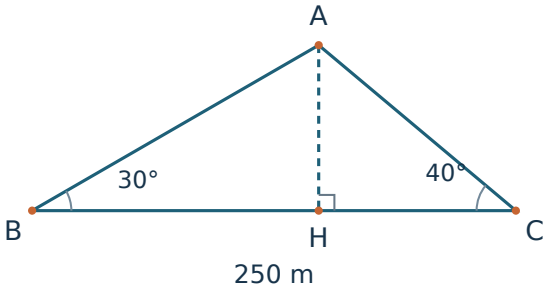
Do $C, D, E$ thẳng hàng theo thứ tự ấy,

$$CE = CD + DE = 50 + \frac{50 \tan 31{,}5^\circ}{\tan 41^\circ} \approx 85{,}247333 \text{ m}.$$

Vậy $CE = 50 + \frac{50 \tan 31{,}5^\circ}{\tan 41^\circ}$ m, xấp xỉ $85{,}25$ m.

## Bài 22. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

Cho tam giác $ABC$ với $BC = 250$ m, $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $\widehat{ACB} = 40^\circ$.




**Bài này**

Tính khoảng cách từ điểm $A$ đến đường thẳng $BC$.

**Lời giải.**

Kẻ $AH \perp BC$. Vì hai góc ở đáy $B, C$ đều nhọn, chân đường cao $H$ nằm trên đoạn $BC$. Khoảng cách cần tìm là $AH$. Đặt $AH = h$ m. Từ các tam giác vuông $ABH$ và $ACH$,

$$BH = \frac{h}{\tan 30^\circ}, \qquad CH = \frac{h}{\tan 40^\circ}.$$

Do $BH + CH = BC = 250$ m, ta có

$$h\left(\frac{1}{\tan 30^\circ} + \frac{1}{\tan 40^\circ}\right) = 250.$$

Suy ra

$$AH = h = \frac{250 \tan 30^\circ \tan 40^\circ}{\tan 30^\circ + \tan 40^\circ} \approx 85{,}505036 \text{ m}.$$

Vậy khoảng cách từ $A$ đến $BC$ xấp xỉ $85{,}51$ m; biểu thức ở trên là giá trị chính xác theo các tỉ số lượng giác.

## Nguồn bài tập

Tham khảo Tài liệu học thêm Toán 9 – Thầy Cường Pleiku, trang156–159 và161–169. Lời giải và hình minh họa do Gia Sư SV biên soạn.